

나노포토닉스 최신 연구 동향

한국과학기술연구원 나노포토닉스연구센터

책임연구원 권석준 (sjoonkwon0531@gmail.com, cheme@kist.re.kr)

2.3. Theory of localized surface plasmon (LSP)

지금까지는 금속-유전체 계면 등에서 일어나는 SPP에 대해 알아 봤습니다. 만약 계면이 평평하지 않고, 구형이면 어떨까요? 그리고 그 구형의 크기가 입사광 파장과 비슷한 범 위이거나 더 작다면 어떤 일이 벌어질까요? 그 때도, 표면 플라즈몬이 발생할까요? 이번 절에서는 이에 대해 자세하게 알아 봅시다.

2.3.1. Rayleigh model

먼저 아주 작은 입자를 생각해 봅시다. 그리고, 그 입자의 크기 a 가 입사광의 파장에 비 해 매우 작은 경우를 생각해 봅시다¹. 흔히 이야기하는 수 십 나노미터 이하 크기의 나 노입자 (nanoparticles), 특히 물 등의 용매에 분산된 낮은 농도²의 나노입자가 이 경우에 해당할 것입니다. 이렇게 작은 나노입자가 외부의 입사광 (주로, 자외선-가시광 등)에 노 출되었을 때, 나노입자의 자유 전자는 입사광의 진동에 집단으로 대응할 것인데 (즉, '플 라즈몬'으로서 행동), 입자의 크기가 너무 작아, 마치 하나의 쌍극자 (dipole)로 간주해도 무방할 정도라고 할 수 있습니다. 사실 나노입자가 꼭 금속 나노입자일 필요는 없고, polarity가 0이 아닌 재료의 나노입자라면 모두 쌍극자가 될 수 있습니다.

¹보통 입사광 파장의 1/5~1/10 수준을 기준으로 잡습니다. 따라서 가시광 영역에서는 ~50 nm 정도입니다.

²낮은 농도 조건이 필요한 까닭은, 너무 농도가 진하면, 입자끼리 뭉치게 되어, 입자가 개별 입자가 아닌 비구형, 비정형의 클러스터 (cluster)형태로서 외부 전자기파와 상호 작용을 하기 때문입니다.

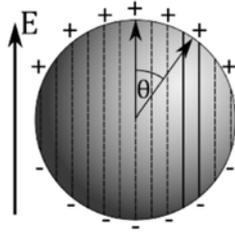


그림 2.11 작은 실린더의 모임으로 근사된 구형 입자가 외부 전자기파에 노출된 상황에서 자유 전자의 이동으로 인한 분극의 모식도

이를 제대로 이해하기 위해, **쌍극자 모멘트 (dipole moment) \mathbf{P}** 를 구형 입자에 대해 다시 한 번 생각해 봅시다. 구형 입자는 외부에서 한 방향으로 입사되는 전자기파에 노출된 상황입니다. 전자기파가 입사되는 방향에 수직인 평면에서 진하는 전기장은, 구형 입자에서는 회전 대칭 축으로 작용하여, 입자 내외부의 자유 전자는 쿨롱 힘에 의해 입사 전자기파의 전기장에 나란한 방향으로 움직일 것입니다. 자유 전자의 이동으로 인해, 그림 2.11에 보인 바와 같이, 입자의 남극 (전기장이 들어 오는 방향)-북극 (전기장이 나가는 방향)으로 볼 수 있는 지역에 전하의 밀도 차이가 생깁니다. 즉, 남극의 중심부에는 $-Q$ 만큼의 전하가, 그리고 북극의 중심부에는 $+Q$ 만큼의 전하가 있는 것처럼 보일 것입니다. 만약, 단위 부피 당 자유 전자의 개수 (즉, 밀도) N 을 알고 있다면, Q 는 $Q = 4\pi a^3 Nq / 3$ 로 계산할 수 있습니다. 여기서, q 는 전자 한 개의 전하량입니다. 또한, 자유 전자가 원래 있던 위치에서 이동하는 정도 (displacement vector)는 구형 입자에 있던 자유 전자 개개에 따라 다를 것이지만, 편의상 이들이 평균적으로 $\langle \mathbf{s} \rangle$ 만큼 이동을 했다고 가정해 봅시다. 그러면, 자유 전자 한 개의 '평균' 쌍극자 모멘트를 전부 합친 분극 (overall polarization) \mathbf{P}_T 는 $\mathbf{P}_T = Q \langle \mathbf{s} \rangle = \int_V Nq \langle \mathbf{s} \rangle dv = 4\pi a^3 Nq \langle \mathbf{s} \rangle / 3$ 로 표현될 수 있을 것입니다. 1장에서 정의했던 단위 부피 당 평균 분극 (polarization) \mathbf{P} 는 $\mathbf{P} = Nq \langle \mathbf{s} \rangle$ 로 정의되므로, \mathbf{P}_T 와는 $\mathbf{P}_T = \int_V \mathbf{P} dV = 4\pi a^3 \mathbf{P} / 3$ 의 관계가 있을 것입니다. 그렇지만, 실험적으로는 Q 와 $\langle \mathbf{s} \rangle$ 를 측정하는 것이 매우 어려우므로, 이들을 대체할 수 있는 물리량을 하나 더 활용해야 합니다. 무엇일까요? 네 그렇습니다. 분극에 의해 유도되는 구형 입자 표면의 전기 포텐셜입니다. 구형 입자 표면에서의 전기 포텐셜 ϕ_{sph} 은 아래 식과 같이 표현됩니다.

$$\phi_{sph} = \frac{P_T \cos \theta}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{dr}a^2} = \frac{aP \cos \theta}{3\epsilon_0\epsilon_{dr}} = \frac{P}{3\epsilon_0\epsilon_{dr}} z. \quad (2.25)$$

방정식 (2.25)에서, ϵ_{dr} 는 구형 입자 외부 매질의 유전 상수입니다. $a \cos \theta = z$ 라고 한 것은, 그림 3.11에서, 외부 전기장과 입자의 분극 방향 모두 z -축에 평행이라고 설정한 것에서 비롯된 것입니다. 이제 분극에 의해 유도되는 남극-북극을 가로질러 생성되는 전기장 (z -축에 평행인 성분, E_{pz})을 계산할 차례입니다. 네. **라플라스 방정식 (Laplace's equation)**을 활용하여 $E_{pz} = -\frac{\partial \phi_{sph}}{\partial z} = -\frac{P}{3\epsilon_0\epsilon_{dr}}$ 라고 표현할 수 있겠습니다. z -축 외에는 다른 전기장 성분은 거의 무시될 수준일 것이므로 (그리고, 어차피 분극에 대해서는 평균치만 취하고 있는 상황입니다), 입자 표면에서 분극에 의해 유도되는 전기장은 $\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0\epsilon_{dr}} \hat{z}$ 로 일반화할 수 있습니다. 이제 구형 입자 주변의 총 전기장 \mathbf{E}_{total} 은, 원래 입사된 전기장 \mathbf{E}_0 과 입자의 분극에 의해 유도되는 전기장 \mathbf{E}_p 의 합으로 표현될 것입니다. 따라서 다음과 같이 쓸 수 있겠습니다.

$$\mathbf{E}_{total} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0\epsilon_{dr}} \hat{z} \rightarrow E_{total} = E_0 - \frac{P}{3\epsilon_0\epsilon_{dr}}. \quad (2.26)$$

방정식 (2.26)에서는, z -축 외에는 다른 전기장 성분은 무시될 수 있는 상황을 활용하였습니다. 또한, 1장에서는 유전상수 ϵ_{dr} 를 갖는 매질에 분산된, 입자 (유전 상수 ϵ_{pr})의 전기장 감수성 (electric field susceptibility) χ 은 $\chi = \epsilon_{pr} - \epsilon_{dr}$ 의 관계를 가졌음을 배웠습니다. 이를 이용하여, 쌍극자 모멘트를 $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}_{total} = \epsilon_0 (\epsilon_{pr} - \epsilon_{dr}) \mathbf{E}_{total}$ 와 같이 쓸 수 있습니다. 이 관계식을 방정식 (2.26)에 대입합니다. 그러면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있습니다.

$$E_{total} = \left(\frac{3\epsilon_{dr}}{\epsilon_{pr} + 2\epsilon_{dr}} \right) E_0. \quad (2.27)$$

방정식 (2.27)을 다시 쌍극자 모멘트에 활용해 봅시다. 그러면 $P = \frac{3\epsilon_0\epsilon_{dr}(\epsilon_{pr} - \epsilon_{dr})}{\epsilon_{pr} + 2\epsilon_{dr}} E_0$ 일 것입니다. 또한 Lorentz polarizability $\alpha(\omega)$ 와 쌍극자 모멘트의 관계식 $\alpha(\omega) = \frac{P_T}{\epsilon_0\epsilon_{dr}E_0}$ 을

이용하면 (여기서, $P_T = \int_V P dV$), $\alpha(\omega) = 4\pi a^3 \left(\frac{\epsilon_{pr} - \epsilon_{dr}}{\epsilon_{pr} + 2\epsilon_{dr}} \right)$ 임도 유도할 수 있습니다. 마지막으로, 전체 쌍극자 모멘트 \mathbf{P}_T 는 다음과 같이 구할 수 있습니다.

$$\mathbf{P}_T = \int_V \mathbf{P} dV = \epsilon_0 \epsilon_{dr} \mathbf{E}_0 \alpha(\omega) = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_{dr} a^3 \mathbf{E}_0 \left(\frac{\epsilon_{pr} - \epsilon_{dr}}{\epsilon_{pr} + 2\epsilon_{dr}} \right). \quad (2.28)$$

방정식 (2.28)은 **클라우지우스-모소티 (Clausius-Mossotti) 방정식**이라고도 하고, 유전 상수대신 굴절률을 사용한 형태는 **로렌츠-로렌쯔 (Lorentz-Lorenz) 방정식**이라고도 합니다.

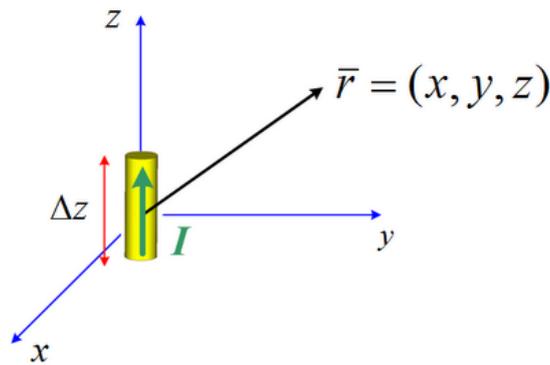


그림 2.12. 헤르츠 쌍극자 안테나

입사광의 파장 길이보다 작은 크기를 갖는 입자의 자유 전자가 집단적으로 분극됨으로써 발생하는 쌍극자 모멘트를 알아 보았습니다. 이제, 쌍극자 모멘트 \mathbf{P}_T 를 갖는, 나노입자가 발산하는 전자기장을 계산해 봅시다. 그런데, 애초에 왜 나노입자가 전자기장을 발산할까요? 외부 전자기파에 노출된 나노입자에 형성된 쌍극자 모멘트가 방정식 (3.28)에 나와 있듯, \mathbf{E}_0 를 따라 계속 방향이 바뀌기 때문입니다. 또한 바뀌는 진동수는 외부 전자기파의 진동수와 일치할 것입니다. 극이 계속 바뀌며 진동하는 쌍극자는 전자기파를 발산합니다. 이렇게 발산되는 전자기파를 **산란파** 혹은 **산란장 (scattered wave or field)**이라고 합니다. 산란파의 특성을 이해하기 위해서는 먼저 **헤르츠 쌍극자 (Hertzian dipole)**라는, 역사가 오래된 안테나 이론을 공부해야 합니다.

헤르츠 쌍극자는 그림 2.12에 나온 것처럼, 짧은 원기둥 모양의 안테나라고 생각하면 됩니다. 원기둥 형태를 가정하는 까닭은 수학적으로 계산도 편리할뿐더러, 앞서 살펴 보았듯, 구형 입자라고 해도 분극은 남극-북극 방향으로 축 대칭으로 발생하기 때문

입니다. 따라서, 축 대칭을 가지면서 남-북극은 평면인 기하학적 형태가 다루기도 쉽고 물리적으로도 의미를 손실시키지 않기 때문에, 시작점으로 매우 적합합니다. 이 때, 원기둥의 반지름은 물론, 원기둥의 길이 Δz 는, 입사 전자기파의 파장보다 매우 짧다고 가정해 봅시다. 이 때, 전류 (I)가 z -축의 음의 부분에서 양의 방향으로 막대 내부에 흐르고 있다면, $z = +\Delta z/2$ 에는 (+) 전하가, $z = -\Delta z/2$ 에는 (-) 전하가 쌓일 것입니다. 그렇다면, 원기둥의 북쪽 (+ Q at $z = +\Delta z/2$)과 남쪽 (- Q at $z = -\Delta z/2$)은 서로 다른 전하를 가지게끔 분극되어, 마치 전기 쌍극자 같은 역할을 할 것입니다.

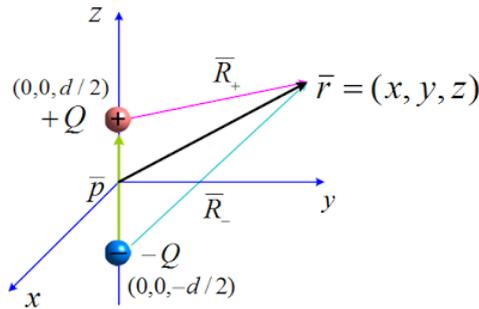


그림 3.13. 그림 3.12에 나온 헤르츠 쌍극자를 수학적으로 단순화한 모형

이는 그림 2.13처럼 수학적으로 간략하게 추상화할 수 있습니다. 또한, 원기둥의 위-아래 단면적이 굉장히 작아서, 전류는 $(x, y) = (0, 0)$ 의 위치에만 있다고 생각해 봅시다. 그러면, 수학적으로, 전류 밀도 \mathbf{J} 는 디랙 델타 함수 (Dirac delta function, $\delta(x)$)를 활용하여, 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$\mathbf{J} = I\delta(x)\delta(y)\hat{\mathbf{z}}. \quad (2.29)$$

이 관계식을 이용하여 자기 벡터 포텐셜 (magnetic vector potential) $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 을 계산해 봅시다.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mu \int_v \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} dv = \left(\mu I \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} dz \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &= \left(\frac{\mu I \Delta z \exp(-jkr)}{4\pi r} \right) \hat{\mathbf{z}}, \quad R \equiv \left(x^2 + y^2 + (z - z')^2 \right)^{1/2}, \quad r \equiv \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

위 식에서, $z' \ll r$ 인 조건을 가정하여, $R \equiv \left(x^2 + y^2 + (z - z')^2 \right)^{1/2} \approx r - \frac{zz'}{r} \approx r$ 임을 이용했습니다.

니다. 또한 $\delta(x)$ 의 성질 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$, $\delta(x)|_{x=0} = \infty$, $\delta(x)|_{x \neq 0} = 0$ 을 활용했습니다. 이 때 주목해야 할 점은, $z' \ll \lambda$ 의 조건이 만족되어야 하는 배경 원인입니다. $z' \ll r$ 인 조건에서, $kR \approx kr - \left(\frac{2\pi z}{r}\right)\left(\frac{z'}{\lambda}\right)$ 이고, 이 때, $z' \ll \lambda$ 이어야만, 비로소 $kR \approx kr$ 라고 할 수 있습니다. 이 조건이 만족되지 않는다면, 방정식 (2.30)의 첫 번째 줄에서, $\exp(-jkR)$ 의 값이 z' 에 따라 변하여, 결국 막대의 위치에 따른 자기 벡터 포텐셜과 외부 전자기장 사이에 위상차가 발생합니다. 그 경우, 방정식 (2.30)의 두 번째 줄로 넘어 가는 근사가 더 이상 성립하지 않을 수 있습니다. 또한, 위치에 따른 위상차가 생기면, 전자가 집단적으로 움직인다는 애초의 가정을 위반하게 될 것입니다. 따라서, 막대 길이 (즉, z' 의 변화 범위)는 외부 전자기파의 파장보다 충분히 작아야만 합니다. 그래서, 외부 파장보다 충분히 작은 구형 입자의 산란 모형을 만들기 위한 베이스캠프로서, 헤르츠 안테나 모형이 활용될 수 있는 것입니다.

방정식 (2.30)에서 자기 벡터 포텐셜을 계산했으므로, 벡터 포텐셜-벡터장의 변환을 이용하여, 전기장 \mathbf{E} 와 자기장 \mathbf{H} 를 아래 식과 같이 다시 유도해 낼 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= j\omega\mathbf{A} + \frac{j}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \frac{1}{\epsilon}\nabla\times\mathbf{F}, \\ \mathbf{H} &= j\omega\mathbf{F} + \frac{j}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) + \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}.\end{aligned}\quad (2.31)$$

방정식 (2.31)에서 \mathbf{F} 는 전기 벡터 포텐셜을 의미합니다. 만약 외부에서 가해 주는 자류 밀도가 없다면, 패러데이의 법칙에 의해, $\mathbf{F} = 0$ 일 것입니다.

이제 헤르츠 쌍극자의 진동으로 인해 원-거리로 발산되는 전자기장 (far-field)의 모습이 어떨지 생각해 봅시다. 쌍극자가 원점에 위치했다고 설정하면, 쌍극자가 발산하는 전자기장은 구-좌표계를 활용하여 더 효율적으로 표현할 수 있습니다. 특히, 전류가 z -축 방향으로 흐르고 있음을 생각하면, 구-좌표계와 카테시안-좌표계에서의 자기 벡터 포텐셜 성분의 관계는 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$A_r = A_z \cos\theta, A_\theta = -A_z \sin\theta, A_\phi = 0. \quad (2.32)$$

위에서 $A_z = \frac{\mu I \Delta z \exp(-jkr)}{4\pi r}$ 입니다 (방정식 (2.30) 참고). 방정식 (2.32)에서는 카테시안-좌

표계를 구-좌표계로 변환시켜 주는, 다음의 관계식을 이용했습니다.

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\phi & \sin\theta \sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\phi & \cos\theta \sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

방정식 (2.32)를 방정식 (2.31)에 대입하면, 자기장을 더 간단하게 표현할 수 있습니다.

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\hat{\phi}}{\mu r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] = \frac{I\Delta z \exp(-jkr)}{4\pi r} \left(jk + \frac{1}{r} \right) \sin\theta \hat{\phi}. \quad (2.33)$$

방정식 (2.33)에서는, 아래에 보인 바와 같이, 구-좌표계에서 정의되는 회전 연산자 $\nabla \times \mathbf{A}$ 의 관계식을 이용했습니다.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (rA_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$$

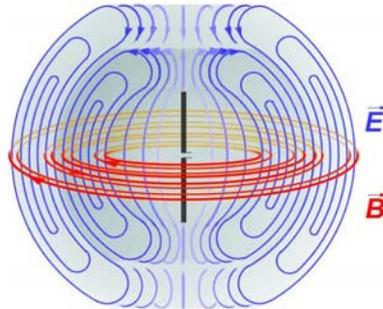
이제, 방정식 (2.33)에서 헤르츠 쌍극자가 발산하는 자기장 \mathbf{H} 을 계산할 수 있게 되었습니다. 보다시피, $\hat{\phi}$ 방향의 성분만 존재합니다 (즉, $H_\phi = \frac{I\Delta z \exp(-jkr)}{4\pi r} \left(jk + \frac{1}{r} \right) \sin\theta$). 맥스웰 방정식 중, 앙페르 (암페어)의 법칙을 활용하면, 헤르츠 쌍극자가 발산하는 전기장도 유도할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\frac{\hat{r}}{r \sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta H_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r} \right] \\ &= \frac{\eta I \Delta z \exp(-jkr)}{4\pi r} \left[\left(\frac{2}{r} - \frac{2j}{kr^2} \right) \cos\theta \hat{r} + \left(jk + \frac{1}{r} - \frac{j}{kr^2} \right) \sin\theta \hat{\theta} \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

방정식 (2.34)에서 볼 수 있다시피, 헤르츠 쌍극자가 발산하는 전기장에는, $\hat{\phi}$ 방향의 성분이 없습니다. 이로써, 헤르츠 쌍극자가 발산하는 전기장과 자기장을 모두 계산할 수 있게 되었습니다. 자, 이제 원-거리 (즉, $r \rightarrow \infty$ 일 때)에서 측정된 전자기장은 어떨까요? 다음과 같이 계산될 것입니다.

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &\sim \frac{\eta I \Delta z \exp(-jkr)}{4\pi r} jk \sin\theta \hat{\theta}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &\sim \frac{I \Delta z \exp(-jkr)}{4\pi r} jk \sin\theta \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

방정식 (2.35)는 흥미로운 정보를 던져 줍니다. 무엇일까요? 네. 그렇습니다. 헤르츠 쌍극자에서 발생하는 전자기장을 원-거리에서 측정했을 경우, \hat{r} 방향으로의 성분은 없다는 것입니다. 전기장은 $\hat{\theta}$ 방향 (polar angle)으로만 형성되고, 자기장은 $\hat{\phi}$ 방향 (azimuthal angle)으로만 형성되기 때문입니다.



2.14. 헤르츠 쌍극자 (검은 막대)에서 발산되는 전기장 (파란색)과 자기장 (빨간색)의 형태 모식도

그림 2.14에는 헤르츠 쌍극자가 발산하는 전기장과 자기장의 분포 형태가 3차원 공간상에 표현되어 있습니다.

이제, 헤르츠 쌍극자 모멘트 \mathbf{P}_T 와 쌍극자가 유도하는 전자기장의 관계를 한 번 알아 봅시다. 먼저, 다음의 관계식에서 헤르츠 쌍극자 모멘트의 표현을 알아 두고 갑시다.

$$I \Delta z \hat{z} = \frac{dQ}{dt} \Delta z \hat{z} = \frac{d(Q \Delta z)}{dt} \hat{z} = \frac{d\mathbf{P}_T}{dt} \hat{z} \quad .$$

$$\rightarrow \mathbf{P}_T = Q \Delta z \hat{z}. \quad (2.36)$$

방정식 (2.36)의 물리적 의미는 매우 중요합니다. 왜냐하면, 전기 쌍극자 모멘트가 시간에 따라 변할 때 (예를 들어 남-북극이 바뀌며 진동하는 상황), 교류 전류, 즉 전자기파가 발생하는 것을 보여 주는 관계식이기 때문입니다. 다시 말해, 헤르츠 쌍극자가 전자기파를 발산하는 크기는 전기 쌍극자 모멘트의 시간 변화율에 비례하는 것입니다. 방정식 (2.36)을 이용해서, 방정식 (2.35)를 다시 표현해 봅시다.

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &\approx \frac{I\Delta z \exp(-jkr)}{4\pi r} jk \sin \theta \hat{\phi} = -jk \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} (\hat{r} \times I\Delta z \hat{z}) \\
&= -jk \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} \left(\hat{r} \times \frac{d\mathbf{P}_T}{dt} \right). \\
\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &\approx \frac{\eta I\Delta z \exp(-jkr)}{4\pi r} jk \sin \theta \hat{\theta} = \eta jk \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} \hat{r} \times (\hat{r} \times I\Delta z \hat{z}) \\
&= \eta jk \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r} \hat{r} \times \left(\hat{r} \times \frac{d\mathbf{P}_T}{dt} \right). \tag{2.37}
\end{aligned}$$

마지막으로, 원거리에서 측정되는 헤르츠 쌍극자가 외부로 복사하는 전력 (Radiated power, P_{rad})을 포인팅 벡터를 이용하여 계산해 봅시다. 아래와 같이 계산할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
P_{rad} &= \frac{1}{2} \oint_S \text{Real}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \eta |\mathbf{H}|^2 r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\
&= \eta \pi \left| \frac{Ik\Delta z}{4\pi} \right|^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\eta |Ik\Delta z|^2}{12\pi} = \frac{\pi \eta}{3} \left| \frac{I\Delta z}{\lambda} \right|^2. \tag{2.38}
\end{aligned}$$

입사광의 파장보다 충분히 작은 구형 입자라면, 나노입자를 헤르츠 쌍극자로 가정할 수 있지 않을까요? 지금까지 공부한 헤르츠 쌍극자 모델을 이용하여, 나노입자가 쌍극자 같은 분극 현상을 보일 수 있다고 가정하여, 이들이 발산하는 전자기파의 원거리에서의 전기장과 자기장 성분을 계산해 봅시다. 이 전자기파는 마치 나노입자로부터 외부로 발산되는 빛 같이 관측될 것입니다. 이를 **레이리 산란 (Rayleigh scattering)**이라고 합니다. 나노입자의 레이리 산란에 의한 원거리에서의 전기장은, 방정식 (2.35)와 (2.28)를 이용하면 다음과 같이 표현할 수 있습니다. 일단, 방정식 (2.28)에서, $\mathbf{P}_T = Q\Delta z \hat{z} = \epsilon_0 \epsilon_{dr} \alpha(\omega) \mathbf{E}_0$ 입니다. 또한, 방정식 (2.36)에서, $\mathbf{P}_T = Q\Delta z \hat{z}$ 이므로,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{P}_T}{\partial t} &= \frac{\partial (Q\Delta z)}{\partial t} \hat{z} = \epsilon_0 \epsilon_{dr} \alpha(\omega) \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} = j\omega \epsilon_0 \epsilon_{dr} \alpha(\omega) \mathbf{E}_0 = j\omega (Q\Delta z) \hat{z} \\
&= I\Delta z \hat{z}
\end{aligned}$$

입니다. 따라서, 구형 입자의 분극에 의해 발산되는 교류 전류 I 의 관계식 $I = j\omega Q$ 이 유도됩니다. 이를 활용하여 원거리에 발산되는 전기장을 다음과 같이 유도합니다.

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &\sim \frac{\eta I \Delta z \exp(-jkr)}{4\pi r} jk \sin \theta \hat{\theta} \\
&= \frac{\eta j \omega Q \Delta z \exp(-jkr)}{4\pi r} jk \sin \theta \hat{\theta} \\
&= \frac{\eta j \omega \mathbf{P}_T \exp(-jkr)}{4\pi r} jk \sin \theta \hat{\theta} \\
&= -\hat{\theta} \frac{k^2 a^3 \sin \theta \exp(-jkr) \mathbf{E}_0 \left(\frac{\epsilon_{pr} - \epsilon_{dr}}{\epsilon_{pr} + 2\epsilon_{dr}} \right)}{r}. \tag{2.39}
\end{aligned}$$

원-거리에서 측정되는 자기장도 (2.39)와 비슷하게 유도할 수 있겠습니다. 또한, 방정식 (2.38)과 마찬가지로, 나노입자가 발산하는 원-거리에서 측정되는 산란장의 전력은 아래와 같이 계산됩니다. 방정식 (2.39)를 이용합시다.

$$P_{scat} = \frac{1}{2} \oint_S \text{Real}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|\mathbf{E}|^2}{\eta_0} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{4\pi k^4 a^6}{3\eta_0} \left(\frac{\epsilon_{pr} - \epsilon_{dr}}{\epsilon_{pr} + 2\epsilon_{dr}} \right)^2 |\mathbf{E}_0|^2. \tag{2.40}$$

여기서 포인팅 벡터를 이용하면, 일단 나노입자에 입사되는 전자기파의 전력 (에너지 면 밀도)는 $P_0 = |\mathbf{E}_0|^2 / 2\eta_0$ 와 같음을 눈치 챌 수 있습니다. 그러면 방정식 (2.40)에서, 우리는 **산란 단면적 (scattering cross-section, σ_{scat})**이라는, 물리적으로 편리한 개념을 아래와 같이 정의하고 표현할 수 있습니다.

$$\sigma_{scat} \equiv \frac{P_{scat}}{|\mathbf{E}_0|^2 / 2\eta_0} = \frac{8\pi k^4 a^6}{3} \left(\frac{\epsilon_{pr} - \epsilon_{dr}}{\epsilon_{pr} + 2\epsilon_{dr}} \right)^2. \tag{2.41}$$

산란 단면적을 다시 한번 구형 입자 단면적으로 정규화한 값 (즉, $\sigma_{scat} / (\pi a^2)$)을 **산란 계수 혹은 효율 (scattering coefficient or efficiency, Q_{scat})**라고 통칭합니다. 방정식 (2.41)에서 볼 수 있듯이, 산란 단면적은 입사광의 파수에 굉장히 강한 의존도를 보입니다 ($\sigma_{scat} \sim k^4$). 다시 말해, **입사광의 파장이 짧을수록, 산란은 더 강하게 된다는** 의미입니다.

산란 단면적의 물리적 의미를 체감하기 위해, 지구의 대기를 예로 들어 보겠습니다. 지구의 대기 주 성분은 질소 (N_2)입니다. 질소 분자 ($N \equiv N$)의 쌍극자 모멘트를 이용하여, 방정식 (2.41)에 의해 질소 분자 한 개에 의한 산란 단면적을 계산할 수 있고, 입사 파장이 532 nm 일 경우, 그 값은 $\sigma_{scat} = 5.1 \times 10^{-31} \text{ m}^2$ 입니다. 질소의 대기 중 농도는 $C_{gas} = 2 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ 입니다. 따라서, 532 nm 파장의 평면파 (plane wave)가 1 m의 거리를 이

동했을 때, 질소 분자에 의한 총 산란 횟수는 $1\text{ m} \times \sigma_{\text{scat}} \times C_{\text{gas}} \sim 10^{-5}$ 으로 계산됩니다. 다시 말해, 전자기파의 광자 10만 개가 1 m를 이동할 때, 이 중, 약 1개가 질소 분자들에 의한 산란으로 소실될 것이라는 의미입니다. 보통, 질소나 산소 등, 대기의 주요 성분의 분포는 지표부터 약 16 km ~ 10⁴ m 내에 90%가 분포, 100 km 이내에 99.99997%가 분포하고 있으므로, 질소 분자에 의한 영향만으로도, 짧은 파장의 태양 가시광은 대기권을 지나면서 대부분 산란될 것임을 알 수 있습니다. 앞서 언급한 산란 단면적의 파장 의존도를 생각해 봅시다. 가시광선 중, 짧은 파장 대역의 파란색은 긴 파장 대역의 붉은색보다 훨씬 더 산란이 강하게 될 것입니다. 실제로 지구의 하늘이 낮에 주로 파란색으로 보이는 까닭은, 태양의 가시광 스펙트럼에서 파란색이 가장 크게 산란이 되기 때문입니다 (사방으로 산란되기 때문에, 어디를 보더라도 파란색으로 보입니다).

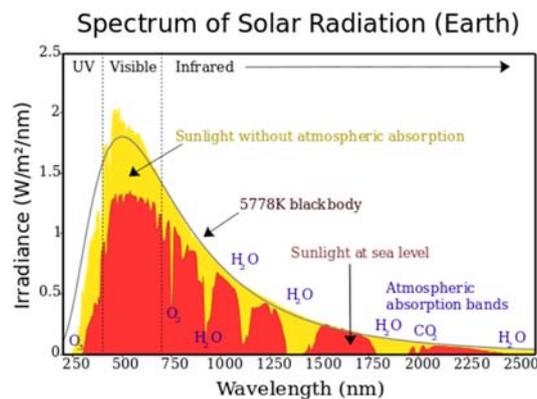


그림 2.15. 지구에 도달하는 태양광의 스펙트럼 (노란색은 지구에 대기가 없을 때의 스펙트럼, 빨간색은 대기에 흡수되고 남은 스펙트럼)

보라색은 어떨까요? 보라색이 파란색보다 더 짧은 파장이니까, 하늘은 보라빛 우울한 하늘이 되어야 하는 것이 아닐까요? 생각해 보니 보라색 하늘이란, 정말 우울한 분위기군요. 불행 중 다행으로, 보라색 대역의 가시광은 산란보다는 대기 중 산소에 의해 흡수가 많이 된 상황이라, 딱히 더 산란되어 하늘의 색깔에 기여할 부분이 별로 없습니다. 물론 하늘이 윈도우에서 가끔씩 우리를 괴롭히는 블루 스크린 같은 파란색은 아닙니다. 하늘이 완전히 파란색은 아닌 이유는, 태양의 가시광 스펙트럼이 색깔에 상관 없이 일정한 스펙트럼이 아닌, 파장 별로 그 세기가 다르기 때문입니다. 태양광 스펙트럼은 그림 2.15에 나타나 있습니다. 그림에서 볼 수 있는 것처럼, 파란색이나 빨간색 파장보다 초록색 파장 대역의 에너지가 더 큰 분포를 보입니다. 태양 가시광 스펙트럼의 파장에 따른 입

사 강도 차이를 고려하면, 실제로는 우리가 실제로 보는 하늘색에 가깝게 대기 산란광의 색깔이 나옵니다. 상대적으로 노란색과 빨간색은 덜 산란되기 때문에, 이미 산란되는 파란색에 대해 상대적으로 더 강하게 직접적으로 관측되고, 따라서, 지구에서 관측하는 태양의 색깔 (그렇지만, 절대 태양 빛을 맨 눈으로 오랫동안 보면 안 됩니다. 시력이 손상될 수 있으니까요)은 노란색+빨간색에 가까운 색으로 보입니다. 우주에서 관측하는 태양은, 지구-태양 사이의 우주 공간에 가시광 스펙트럼의 (산란+흡수)를 일으킬만한 성분이 거의 없기 때문에, 하얀색에 가깝게 보이는 것과 대비되는 부분입니다. 물론 우주가 검은색으로 보이는 까닭은, 태양 빛을 산란시킬 성분이 거의 없기 때문이고요 (물론, 우주적인 스케일에서 우주가 검은 이유는, 천체나 발광 성분에서 나오는 빛이 우리에게 도달하기까지 하되, 우주가 팽창하고 있기 때문에, 가시광 파장 대역 이하의 빛들은 적색 편이(red-shift)되고, 그나마 도달하는 가시광 대역 빛들의 강도도 거리의 제곱에 반비례하여 매우 약해지기 때문입니다). 해질 무렵의 노을 색깔은 그렇다면 왜 붉은색이 되는 것일까요? 태양이 지평선에 거의 맞닿은 상황에서는, 태양에서 발산되는 가시광 스펙트럼이 거쳐야 하는 대기권의 투과 거리가 훨씬 길어집니다. 파란색은 산란이 너무 많이 되어, 소실될 것이고, 그나마 산란이 덜 되는 붉은색 계열이 제일 많이 살아 남아서, 하늘을 붉게 물들이는 것입니다.

일반적으로 분극될 수 있는 나노입자라면 (즉, polarity가 0이 아니라면), 위에서 유도한 것처럼, 입사광에 의해 분극이 일어나고, 이의 진동 때문에 전자기파가 발산되는 산란 현상이 생깁니다. 즉, 레일리 산란을 위해, 꼭 금속 나노입자가 필요한 것은 아닙니다. 그런데, 만약 그러한 나노입자가 금속 나노입자라면 어떨까요? 그렇다면 산란 외에도, 다른 전자기파 현상도 생길 것입니다. 무엇일까요? 그렇습니다. 바로 **흡수 (absorption)**입니다. 그렇다면 왜 빛이 금속 나노입자에 흡수될 수 있는 것일까요? 그것은 '금속'구이기 때문입니다. Drude 모형에서 금속의 유전 상수는 주로 가시광-근적외선 대역에서 **복소수** 형태입니다. 이 중, 허수부 ($\epsilon_r''(\omega)$)가 실제로 **전도도**와 $\sigma(\omega) = \omega\epsilon_r''(\omega)$ 의 관계가 있다는 것을 배웠습니다. 전도도가 있다는 것은, 역으로 전기적 저항이 있음을 의미합니다. 물론 금속뿐만 아니라, 허수부의 유전 상수를 갖는 물질이라면, 동일하게 흡수에 대한 이야기를 할 수 있을 것입니다. 다만, 주로 자외선-가시광-근적외선 대역에서, 유전 상수의 허수부가 0이 아닌 재료는 대부분 금속이기 때문에, 일반적으로 금속을 상정해도 무방합니다. 이제, 옴의 법칙을 생각해 봅시다. 전도도를 갖는 금속 덩어리에 전기가 통

할 때, 얼마나 많은 에너지가 흡수될까요? 아래와 같이 쓸 수 있을 것입니다.

$$P_{abs} = \frac{1}{2} \int_V \frac{|\mathbf{E}_{int}|^2}{\eta(\omega)} dv = \frac{1}{2} \int_V \sigma(\omega) |\mathbf{E}_{int}|^2 dv \approx \frac{V}{2} \omega \varepsilon_r''(\omega) |\mathbf{E}_{int}|^2. \quad (2.42)$$

방정식 (2.42)에서, \mathbf{E}_{int} 는 금속구 내부의 전기장, $\eta(\omega)$ 는 교류전류 (쌍극자 진동으로 발생하는 전자기파의 전류)가 금속구 내부에서 느끼는 임피던스 (저항 성분), V 는 금속구의 부피를 의미합니다. \mathbf{E}_{int} 는 어떻게 계산할 수 있을까요? 작은 구형 입자 주변의 스칼라 포텐셜 ϕ_{out} 은 정전기 한계 모형 (electrostatic limit)에 의하면 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$\phi_{out} = \left(\left(\frac{\varepsilon_{pr} - \varepsilon_{dr}}{\varepsilon_{pr} + 2\varepsilon_{dr}} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 - 1 \right) E_0 z$$

이제, 입자의 남-북극을 관통하는 선을 생각해 봅시다. 이 선을 따라 다니면, $r = |z|$ 이므로,

로, $\phi_{out} = \left(\left(\frac{\varepsilon_{pr} - \varepsilon_{dr}}{\varepsilon_{pr} + 2\varepsilon_{dr}} \right) \left(\frac{a^3}{z^2} \right) - z \right) E_0$ 입니다. 이 선을 따라서 측정되는 입자 외부의 전기장은

$\mathbf{E}_{out} = -\frac{d\phi_{out}}{dz} = \left(2 \left(\frac{\varepsilon_{pr} - \varepsilon_{dr}}{\varepsilon_{pr} + 2\varepsilon_{dr}} \right) \left(\frac{a}{|z|} \right)^3 + 1 \right) \mathbf{E}_0$ 으로 표현될 것입니다. 그렇다면, 입자의 남극 혹은

북극 지점의 표면에서 측정되는 외부 전기장은 $\mathbf{E}_{out}(|z|=a) = \frac{3\varepsilon_{pr}\mathbf{E}_0}{\varepsilon_{pr} + 2\varepsilon_{dr}}$ 으로 쓸 수 있을 것

입니다. 남극 혹은 북극에서의 전기장은 표면에 수직일 것입니다. 이 말은 입자와 매질 사이의 계면에 전기장이 수직으로 형성된다는 의미입니다. 따라서 전자기파의 경계 조건을 활용하여, $\varepsilon_{dr}\mathbf{E}_{out}(|z|=a) = \varepsilon_{pr}\mathbf{E}_{int}(|z|=a)$ 이어야 할 것입니다. 따라서, 입자의 내부 전기장은 $\mathbf{E}_{int} = \frac{3\varepsilon_{dr}}{\varepsilon_{pr} + 2\varepsilon_{dr}} \mathbf{E}_0$ 로 표현될 수 있습니다. 여기서 입자 내부의 전기장은 입자 내부

의 위치에 상관 없이 일정하다고 가정하였습니다. 이 가정이 성립하려면, 입자가 충분히 작아야 하고, 앞서 살펴 보았던, 유전체-금속 계면에서의 SPP skin depth보다도 작아야 할 것입니다. 보통 금이나 은 같은 경우, skin-depth가 20-30 nm 수준이므로, 금이나 은의 나노입자 크기도 이보다는 작아야 할 것입니다. 이를 이용하면, 방정식 (2.42)에서 산란 단면적과 유사한 방식으로, 흡수 단면적 (absorption cross-section, σ_{abs})도 아래와 같이 유도할 수 있습니다.

$$\sigma_{abs} \equiv \frac{P_{abs}}{|\mathbf{E}_0|^2/2\eta_0} = \frac{4\pi\epsilon_{pr}''(\omega)ka^3}{3\epsilon_{dr}} \left(\frac{3\epsilon_{dr}}{\epsilon_{pr}' + 2\epsilon_{dr}} \right)^2. \quad (2.43)$$

레일리-산란이나 흡수가 일어나는 영역에서는, 물질에 대한 전자기파의 소실 (extinction) 은 오직 흡수와 산란에 의해서만 일어나는 것으로 근사합니다. 즉, 소실은 흡수와 산란의 합이고, 따라서, 금속 구의 **소실 단면적 (extinction cross-section)**은 흡수 단면적과 산란 단면적으로 합으로 표시됩니다 (즉, $\sigma_{ext} = \sigma_{abs} + \sigma_{scat}$).

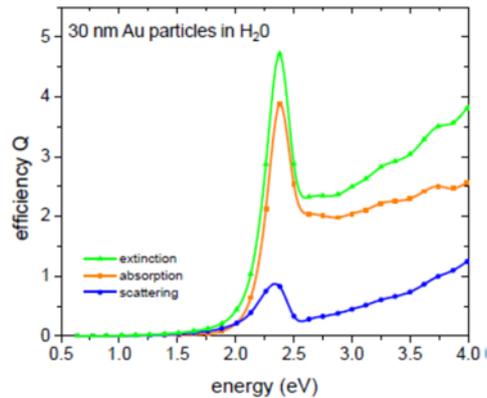


그림 2.16. 물 속에 분산된 30 nm 크기의 금 나노입자의 산란, 흡광, 소실 특성

산란, 흡수, 소실 단면적을 계산했으므로, 구형 입자의 단면적 (πa^2)으로 이들을 정규화하면, **레일리-산란 계수 (scattering (Q_{scat})), absorption (Q_{abs}), extinction coefficient (Q_{ext}))**도 계산할 수 있을 것입니다. 그림 2.16에는 30 nm의 지름을 갖는 금 나노입자가 물에 분산되어 있을 경우에 대해 (이 때, 분산된 농도는 충분히 묽다고 가정), 레일리-산란, 흡광, 소실 계수의 자외선-가시광선-근적외선 대역에서의 스펙트럼을 보였습니다. 산란과 흡광 모두 2.3 eV 정도의 입사광 파장에서 공명 특성을 보이며 (즉, 가장 강하게 산란, 흡수, 소실되며), 이는 물에 분산된 30 nm 크기의 금 나노입자의 LSPR에 해당합니다.

한 가지 흥미로운 부분을 더 보고 마무리하겠습니다. 나노입자 표면에서 측정되는 외부 전기장과 내부 전기장이 각각 $\frac{\mathbf{E}_{out}}{\mathbf{E}_0} = \frac{3\epsilon_{pr}}{\epsilon_{pr} + 2\epsilon_{dr}}$ 와 $\frac{\mathbf{E}_{int}}{\mathbf{E}_0} = \frac{3\epsilon_{dr}}{\epsilon_{pr} + 2\epsilon_{dr}}$ 로 표현된 것을 봅시다. 금속 입자의 경우, $\epsilon_{pr}' < 0$ 인 경우가 일반적이라고 했습니다. 그렇다면, 이 관계식에서, 특정한 각-주파수에 대해, 분모가 발산할 수 있는 경우, 즉, $\epsilon_{pr}' = -2\epsilon_{dr}$ 를 만족하

는 재료의 조합이 생길 수 있을 것입니다. 이러한 특정 각-주파수를 **Fröhlich frequency** (ω_F)라고도 합니다. 이 경우, 금속 입자의 내부 전기장과 표면에서 측정되는 외부 전기장 모두 매우 커질 것입니다 (이 때, 입자의 크기도 작고, 입자의 표면에서만 생각하고 있으므로, 두 전기장 모두 근-거리장 (near-field)입니다). 다시 말해, $\epsilon_{pr}' = -2\epsilon_{dr}$ 의 조건이 만족되는 경우라면, 근접장이 어마어마하게 강화되는 듯한 효과가 생길 것입니다. 이러한 현상을 **근접장 강화 (near-field enhancement)**라고 합니다. 이 경우, 방정식 (3.41)과 (3.43)에서 보듯, 흡수와 산란 단면적 모두, 분모가 0으로 접근하기 때문에, 최대가 됩니다. 이 조건이 만족되면, 마치 외부 전자기파의 세기가 갑자기 감소되는 것처럼 보일 것입니다. 이를 **입자 플라즈몬 공명 (particle plasmon resonance)**라고 혹은 **국재 표면 플라즈몬 공명 (localized surface plasmon resonance, LSPR)** 이라고 합니다. 예를 들어, 진공에 분산된 은 나노입자의 경우, 3.45 eV (~350 nm), 금 나노입자의 경우 2.6 eV (~476 nm) 정도의 전자기파가 입사하였을 때, LSPR이 발생합니다. 금속의 Drude 모형 $\epsilon_{pr}(\omega) \sim 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ 에 의해, 만약 $\epsilon_{dr} = 1$ 이라면 (즉, 공기 중의 나노입자를 가정), LSPR를 유도하는 각-주파수 ω_{LSP} 는

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{LSP}^2} \approx -2$$

$$\rightarrow \omega_{LSP} \approx \omega_p / \sqrt{3}$$

로 계산될 것입니다.

LSPR 조건, 즉, $\epsilon_{pr}' = -2\epsilon_{dr}$ 일 때, 금속의 산란 및 흡광 계수를 살펴 봅시다. 먼저 방정식, (2.41)에서, 산란 계수는 $Q_{scat} = \frac{8k^4 a^4}{3} \left(\frac{\epsilon_{pr}' + j\epsilon_{pr}'' - \epsilon_{dr}}{\epsilon_{pr}' + j\epsilon_{pr}'' + 2\epsilon_{dr}} \right)^2$ 입니다. $\epsilon_{pr}' = -2\epsilon_{dr}$ 인 상황이므로, $Q_{scat} = \frac{8k^4 a^4}{3} \left| \frac{j\epsilon_{pr}'' - 3\epsilon_{dr}}{j\epsilon_{pr}''} \right|^2 = \frac{8k^4 a^4}{3} \left(\frac{9\epsilon_{dr}^2 + \epsilon_{pr}''^2}{\epsilon_{pr}''^2} \right)$ 입니다. 마찬가지로, 방정식 (2.43)에서, 흡광 계수는 $Q_{abs} = \frac{12\epsilon_{dr}\epsilon_{pr}''ka}{(\epsilon_{pr}' + 2\epsilon_{dr})^2 + \epsilon_{pr}''^2} = \frac{12\epsilon_{dr}ka}{\epsilon_{pr}''}$ 입니다. 보통 금이나 은 같은 금속의 경우, 흡광 계수가 산란 계수보다 수 배 이상 큰 값을 갖습니다.

LSPR인 조건에서, 흡광이나 소실 스펙트럼을 찍어 보면, 특정 각-주파수에서 흡

광, 산란 및 소실 계수의 값이 최대값이 되는 것은 이제 이해할 수 있을 것입니다. 즉, 뾰족한 봉우리가 있는 그래프가 그려지게 될 것입니다. 그런데, 한 단계 더 나아가, 같은 조건에서, 봉우리의 위치가 아닌, 봉우리의 폭, 즉 full width half maximum (FWHM) 값으로 대표되는, 봉우리의 너비는 어떤 정보를 줄까요? LSPR은 기본적으로, 금속 입자의 쌍극자 형성에 의한 입자 내외부의 전자기장 진동의 특성에 관한 것이었습니다. 그리고, 입자는 이상적으로 균일하며, 내부에 defect 같은 것도 없고, 모양은 완벽한 구형이고, 표면은 아주 매끄럽다고 가정했습니다. 따라서, 이론적으로는 FWHM 값이 매우 작아야 정상일 것입니다. 그런데, 이러한 요소들이 추가될 때마다 공명 과정에 브레이크 (damping)가 걸립니다. 브레이크가 걸리는 정도가 크면 클수록, 공명에 반응하는 정확도도 떨어져서, 결국 FWHM 값도 커지고, 따라서 peak도 더 넓어질 것입니다. 이러한 damping 과정에 영향을 미치는 것은, 입자 내부의 떨림자 (phonon)과 자유 전자의 결합 (electron-phonon coupling), 쌍극자의 진동, 입자 표면의 거칠기, 내부 grain boundary와 defect 등입니다. 이 중에서, 쌍극자의 진동과 표면 상태는 입자의 크기와 관련이 있습니다. 특히, 쌍극자의 진동에 의한 산란이 흡광 계수 대비, 얼마나 큰지는, 결국 LSPR에 있어서, 산란에 의한 발산 damping (radiative damping)의 크기를 결정하게 되는데, 충분히 작은 금속 나노 입자에 대해서는, 이 비율이 대략 1% 내외이므로, radiative loss에 의한 damping은 매우 작다고 할 수 있습니다.