

나노포토닉스 최신 연구 동향

한국과학기술연구원 나노포토닉스연구센터

책임연구원 권석준 (sjoonkwon0531@gmail.com, cheme@kist.re.kr)

3.2. 광도파로 (Waveguide)

이번 절에서는 **광도파로 (waveguide)**에 대한 공부를 해 보겠습니다. 광도파로는 포토닉스 및 광학 장치에서 빼놓을 수 없는 가장 중요한 장치 중 하나입니다. 말 그대로, 빛을 원하는 위치에서 원하는 방향으로 **전달** 혹은 **유도**하는 장치입니다. 전자공학에서는 전자가 PCB기판 같은 회로의 금속 도선을 따라 '흘러 가면서' 전달된다고 생각할 수 있지만,¹ 빛이 전달되는 방식은 그렇게 간단하지 않습니다. 왜냐하면 빛이 지나 다닐 수 있는 '도선'이라는 개념은 전자가 흐르는 도선 혹은 전선과는 개념적으로 좀 다르기 때문입니다. 차이점이 생기는 가장 큰 이유는, 빛의 성질이 입자인 동시에 파동이기도하다는 이중성에 기인합니다.² 파동으로서의 빛은 특정한 매질을 지날 때, 호이겐스 (Huygens, 하위헌스로 읽기도 함)의 원리에 따라 퍼지는 성질이 있기 때문에, 빛을 특정한 지역에 가둬 두고 한 방향으로만 전파되게 하려면 특별한 형태를 가진 매질의 조합으로 이루어진 장치가 필요합니다.

사실 우리는 이미 이러한 관점에서 기초적인 광도파로를 본 적이 있습니다. 앞서 **전반사 (Total internal reflection, TIR)**를 배웠던 것이 기억날 것입니다. 그 때, 광섬유에 대한 이야기를 하면서, 광섬유는 전반사 현상을 이용하는 좋은 예라고 했습니다. 이런 관점에서 보았을 때, 광섬유는 광도파로의 대표적인 종류이기도 합니다. 왜냐하면, 전자기파가 광섬유의 속심 (core)으로만 전송되기 때문입니다. 즉, 한 번 속심에 입사된 전자기

¹사실 전자는 흐른다고 보다는 이리저리 당구공처럼 충돌하며 진행하거나 (ballistic transport), 향수 분자처럼 확산되면서 퍼지거나 (diffusive transport)하는 방식으로 움직입니다.

²물론 전자도 입자인 동시에 파동입니다만, 우리가 주로 사용하는 가시광-자외선 영역대의 빛의 파장에 비해, 물질파로서의 전자의 파장은 너무 짧아서, 일반적으로 마이크로 전자공학에서 다루는 소자에서는 파동으로서의 전자의 성질을 깊이 고려하지 않아도 됩니다.

파는 껍질 (cladding)으로 빠져 나가지 않고³, 오로지 속심에서만 이동하는 성질이 있어서, 광섬유를 장거리 통신용으로 많이 활용하는 것입니다. 광섬유는 광도파로 관점에서는 channel waveguide라고도 합니다. 광섬유를 비롯해서, 여러 가지 형태의 광도파로가 있을 것인데, 이번 절에서는 특히 수학적으로 해석적 해가 알려진 몇 가지 광도파로에 대한 공부를 해 보도록 하겠습니다.

우선 광도파로는 그 목적에 따라 여러 형태의 서로 다른 재질로 이루어진 그림 3.9에 개략적으로 나타낸 바와 같이 각양 각색의 종류가 있습니다. 예를 들어, 첫 번째로 언급된 동심원 구조의 단면을 갖는 긴 케이블처럼 생긴 광도파로 (coaxial cables)는 주로 라디오파 주파수 (Radio Frequency (RF), 대략 ~3 GHz)로 구동되는 소자를 연결하는 도선으로 활용됩니다. 이 광도파로는 겉 껍질과 제일 안쪽의 매질은 도전성 소재 (주로 금속)로, 중간층은 유전체로 구성됩니다. 복선 광도파로 (two-wire line)은 주로 실내의 안테나와 TV를 연결하는 등에 쓰였고, 마이크로띠 광도파로 (microstrip line)은 마이크로파 (microwave) 대역의 주파수에서 구동되는 집적 회로에 쓰이고 있습니다. 직사각형 광도파로 (Rectangular waveguide)나 광섬유 같은 단선 유전체 광도파로 (dielectric waveguide)는 이보다 더 짧은 파장 대역, 혹은 가시광-근적외선 대역의 전자기파를 전달하기 위한 용도로 주로 활용됩니다.

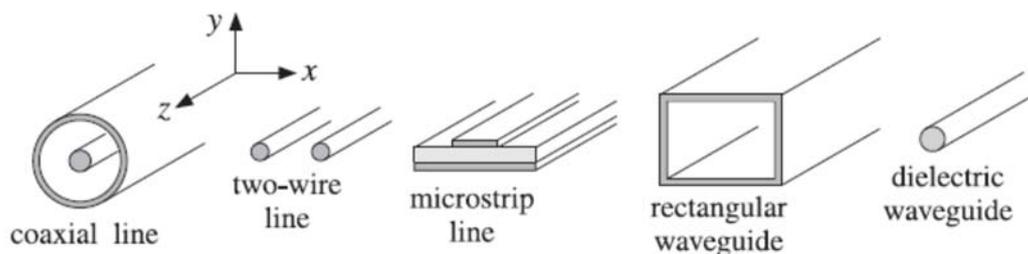


그림 3.9. 여러 종류의 광도파로

³물론 껍질과 속심의 계면에서, 소산파 전자기장 (evanescent field)가 형성되기는 하지만, 전자기파의 에너지가 유의미한 수준으로 소산되는 것은 아닙니다.

3.2.1. 병렬판 도파관 (parallel-plate waveguide)

먼저 이번 세부 절에서는, **병렬판 도파관 (parallel-plate waveguide)**에 대해 공부해 봅시다. 이 광도파로는, 넓지만 얇은 도전성 두 개의 병렬판 사이에 유전체 박막 (혹은 공기)이 샌드위치 같이 끼어 있는 형태입니다. 역시 시작은 맥스웰 방정식입니다.

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}, \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}. \quad (3.10)$$

위 방정식 (3.10)은 해석적 풀이를 위해, 아래 같이 3차원 공간 상에서 풀어서 쓸 수 있습니다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -j\omega\mu H_x, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z, \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j\omega\epsilon E_x, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z. \end{aligned} \quad (3.11)$$

방정식 (3.11)을 더 단순한 형태로 만들면 어떨까요? 이를 위해, 병렬판 도파관의 기하학적 특성을 최대한 활용해 봅시다. 먼저, 일반성을 잃지 않고, 전자기파는 \hat{z} 방향으로만 β 만큼의 파수를 가지면서 병렬하는 도전판 사이에 끼인 유전체 박막 속에서 진행하고 있고, 또한 \hat{z} 방향으로 위 아래의 도전판이나 끼어 있는 유전체 매질의 유전 상수가 변하지 않는다고 생각해 봅시다. 그렇다면, 전기장과 자기장은 각각 $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0(x, y)\exp(-j\beta z)$, $\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}_0(x, y)\exp(-j\beta z)$ 라고 표현할 수 있을 것입니다. 이 형식을 방정식 (4.11)에 대입하면 다음과 같은 관계식을 얻습니다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{0,z}}{\partial y} + j\beta E_{0,y} &= -j\omega\mu H_{0,x}, \quad -j\beta E_{0,x} - \frac{\partial E_{0,z}}{\partial x} = -j\omega\mu H_{0,y}, \quad \frac{\partial E_{0,y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0,x}}{\partial y} = -j\omega\mu H_{0,z}, \\ \frac{\partial H_{0,z}}{\partial y} + j\beta H_{0,y} &= j\omega\epsilon E_{0,x}, \quad -j\beta H_{0,x} - \frac{\partial H_{0,z}}{\partial x} = j\omega\epsilon E_{0,y}, \quad \frac{\partial H_{0,y}}{\partial x} - \frac{\partial H_{0,x}}{\partial y} = j\omega\epsilon E_{0,z}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

이 방정식을 더 간단한 관계식으로 만들 수 있을까요? 일단, 다섯 번째 관계식에서 $E_{0,y} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(-j\beta H_{0,x} - \frac{\partial H_{0,z}}{\partial x} \right)$ 이므로, $k^2 = \omega^2 \mu\epsilon$ 인 기본 관계식과 함께, 이 관계식을 첫 번째 관계식에 대입하면, 아래와 같이 $H_{0,x}$ 에 대한 관계식을 얻습니다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{0,z}}{\partial y} + j\beta \left[\frac{1}{j\omega\epsilon} \left(-j\beta H_{0,x} - \frac{\partial H_{0,z}}{\partial x} \right) \right] &= -j\omega\mu H_{0,x} \\ \rightarrow \therefore H_{0,x} &= \frac{j}{(k^2 - \beta^2)} \left(\omega\epsilon \frac{\partial E_{0,z}}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_{0,z}}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

마찬가지로, 진행 파수에 수직인 $x-y$ 평면에서의 전기장과 자기장 성분 (transverse electromagnetic field)을 아래와 같이 찾을 수 있습니다.

$$\begin{aligned} H_{0,y} &= \frac{-j}{(k^2 - \beta^2)} \left(\omega\epsilon \frac{\partial E_{0,z}}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_{0,z}}{\partial y} \right), \\ E_{0,x} &= \frac{-j}{(k^2 - \beta^2)} \left(\beta \frac{\partial E_{0,z}}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_{0,z}}{\partial y} \right), \\ E_{0,y} &= \frac{j}{(k^2 - \beta^2)} \left(-\beta \frac{\partial E_{0,z}}{\partial y} + \omega\mu \frac{\partial H_{0,z}}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

위 방정식에서, $E_{0,z} = 0$ 이고 $H_{0,z} \neq 0$ 인 경우는, 전기장이 오로지 진행 파수에 수직인 평면 상에만 존재하는 셈이므로, TE 편광되는 것과 비슷한 느낌이 납니다. 그래서 **TE 모드**라고 부릅니다. 여기서 주의해야 할 점은, 광도파로에서 말하는 TE 모드는 TE 편광과는 아무런 상관이 없다는 것입니다. 느낌은 비슷한데, 물리적으로는 서로 다른 현상을 가리키는 것이므로 혼동이 없길 바랍니다. 마찬가지로, $H_{0,z} = 0$ 이고 $E_{0,z} \neq 0$ 인 경우는, **TM 모드**라고 부릅니다. $H_{0,z} = 0$ 이고 $E_{0,z} = 0$ 인 경우는, TE와 TM을 합쳐서, **TEM 모드**라고 부릅니다. $H_{0,z} \neq 0$ 이고 $E_{0,z} \neq 0$ 인 경우는 **하이브리드 모드 (Hybrid mode)**라고 부릅니다. 하이브리드 모드는 해석적인 방법으로는 공간 상의 전자기장 분포를 구할 수 없기 때문에, 주로 수치해석적인 방법으로 광도파로 방정식을 계산합니다.

방정식 (3.13)과 (3.14)을 풀기 위해, 먼저 가장 간단한 **TEM 모드**를 계산해 봅시다. 방정식 (3.12)에 $H_{0,z} = 0$ 이고 $E_{0,z} = 0$ 인 조건을 활용하면, 아래의 관계식을 발견할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} j\beta E_{0,y} = -j\omega\mu H_{0,x}, \quad -j\beta E_{0,x} = -j\omega\mu H_{0,y}, \quad \frac{\partial E_{0,y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0,x}}{\partial y} = 0, \\ j\beta H_{0,y} = j\omega\epsilon E_{0,x}, \quad -j\beta H_{0,x} = j\omega\epsilon E_{0,y}, \quad \frac{\partial H_{0,y}}{\partial x} - \frac{\partial H_{0,x}}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

방정식 (3.15)의 첫 번째와 다섯 번째 관계식으로부터, $\beta^2 = \omega^2 \mu\epsilon$ 이고, 기본적으로

$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ 이므로, TEM 모드에서는 $\beta = k$ 임을 알 수 있습니다. 또한, 전기장이 파동 방정식을 만족시켜야 하므로, $\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$ 인 관계에서, $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0(x, y) \exp(-j\beta z)$ 를 대입하면, 아래의 관계식을 얻습니다.

$$\frac{\partial^2 E_{0,x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0,x}}{\partial y^2} - \beta^2 E_{0,x} + k^2 E_{0,x} = 0 \rightarrow \therefore \frac{\partial^2 E_{0,x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0,x}}{\partial y^2} = 0. \quad (3.16)$$

마찬가지로, $E_{0,y}$, $H_{0,x}$, $H_{0,y}$ 에 대해서도 같은 형식의 방정식을 얻습니다.

이러한 형태의 방정식은 어디선가 많이 보던 방정식 아닙니까? 네. 그렇습니다. 그냥 단순한 **라플라스 (Laplace) 방정식**입니다. 이 방정식에서는, 파수가 0이 되는 셈이므로, 전파되는 현상이 아닌, 가만히 있는 현상에 해당합니다. 즉, 축전기에서 많이 보던 **정전기 방정식 (electrostatic equation)**이 되는 셈이지요. 정전기 방정식의 경우, 전기장은 단순히 스칼라 포텐셜의 구배, 즉, $\mathbf{E} = -\nabla V$ 의 형태로 표현되었던 것을 기억해 봅시다. 여전히 변위 전기장 \mathbf{D} 은 $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ 와 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 의 관계식을 만족시켜야 합니다. 따라서, $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = 0$ 이고, LHI 매질에서는, $\nabla^2 V = 0$ 의 관계식이 만족될 것입니다. 특히 \hat{y} 방향으로 특성이 일정하다고 시스템을 설정하였으므로, 이 관계식은 $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$ 같은 단순한 형태가 될 것입니다. 이제, 병렬 도전판 사이의 거리를 $2d$ 라고 하고, 아래 도전판과 중간 유전체 사이의 계면의 위치를 $x=0$, 위 도전판과 유전체 사이의 계면의 위치를 $x=2d$ 라고 설정해 봅시다. 미분방정식 $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$ 를 풀기 위해서는, 이 두 군데의 계면에서의 경계 조건 $V(x=0)$ 와 $V(x=2d)$ 이 필요합니다. 애초 전압차가 있어야, 물리적으로 0이 아닌 전자기장이 생기는 상황이므로, 임의로 $V(x=0)=0$ 와 $V(x=2d)=V_0$ 라고 설정해 보겠습니다. 이 경계 조건을 활용하면, 미분방정식의 해는 $V(x) = \frac{V_0}{2d} x$ 로 계산될 것입니다. 따라서, 파수에 수직인 평면에 형성되는 전기장 \mathbf{E}_T 은 $\mathbf{E}_T = -\nabla V = -\frac{V_0}{2d} \hat{x}$ 로 계산될 수 있습니다. 최종적으로, 광도파로에 형성되는 전체 전기장은 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_T \exp(-j\beta z) = -\frac{V_0}{2d} \exp(-j\beta z) \hat{x}$ 라고 표현될 수 있을 것입니다. 자기장은 $\mathbf{H} = \frac{\hat{z} \times \mathbf{E}}{Z_{TEM}}$ 의

관계에서, $\mathbf{H} = \frac{V_0}{2\eta d} \exp(-j\beta z) \hat{y}$ 라고 표현될 수 있을 것입니다.⁴ TEM 모드의 전자기장 임피던스 Z_{TEM} 는 어떻게 계산할 수 있을까요? 일단 옴의 법칙에서 $Z_{TEM} = V_0/I_{TEM}$ 라고 쓸 수 있습니다. 이제 I_{TEM} 를 유도할 차례입니다. 표면 전류 밀도 벡터 \mathbf{K} 와 표면에 수직인 단위 벡터 \mathbf{n} 를 알고 있을 때, 기초 전자기학에서 전류가 흐르고 있는 무한한 평판 위에 형성된 자기장 \mathbf{H}_{sheet} 은 $\mathbf{H}_{sheet} = \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{n}}{2}$ 같이 표현된다는 것을 배운 바 있습니다. 따라서 도파관 내부에 형성된 자기장 \mathbf{H} 은 $\mathbf{H} = \mathbf{K} \times \mathbf{n}$ 이 될 것입니다. 회전 벡터 항등식으로부터, $\mathbf{K} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ 이고, $\mathbf{n} = -\hat{x}$ 이므로, $\mathbf{K} = \mathbf{H} \times \hat{x}$ 입니다. I_{TEM} 의 계산을 위해서는 병렬 도전판의 넓이가 유한하다고 가정해야 합니다. \hat{y} 방향으로 평판의 너비를 W 라고 설정하겠습니다. 그러면 I_{TEM} 는

$$I_{TEM} = \int_0^W (\mathbf{K} \cdot \hat{z}) dy = \int_0^W ((\mathbf{H} \times \hat{x}) \cdot \hat{z}) dy = \int_0^W H_y dy$$

같이 계산될 수 있습니다. 앞서 유도한 도파관 내부의 자기장 $\mathbf{H} = \frac{V_0}{2\eta d} \exp(-j\beta z) \hat{y}$ 로부터 $H_y = \frac{V_0}{2\eta d} \exp(-j\beta z)$ 이고, z 의 위치는 임의로 설정할 수 있으므로 $z=0$ 라고 놓으면 $H_y = \frac{V_0}{2\eta d}$ 입니다. 따라서 $I_{TEM} = \int_0^W H_y dy = \int_0^W \frac{V_0}{2\eta d} dy = \frac{WV_0}{2\eta d}$ 입니다. 따라서, $Z_{TEM} = \frac{V_0}{I_{TEM}} = \frac{2\eta d}{W}$ 인 관계식을 유도할 수 있습니다.

다음으로 **TE 모드**를 계산해 봅시다. 이 경우, $E_{0,z} = 0$ 이고 $H_{0,z} \neq 0$ 인 조건을 활용할 수 있으므로, 방정식 (3.14)로부터, 아래의 관계식을 발견할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} H_{0,x} &= \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_{0,z}}{\partial x}, & H_{0,y} &= \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_{0,z}}{\partial y}, \\ E_{0,x} &= \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_{0,z}}{\partial y}, & E_{0,y} &= \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_{0,z}}{\partial x}, & k_c^2 &\equiv k^2 - \beta^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

방정식 (3.17)에서는 간단하게 TE 모드의 전자기장 임피던스 Z_{TE} 를 $Z_{TE} = E_{0,x}/H_{0,y} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \eta \frac{k}{\beta}$ 같이 구할 수 있습니다. 또한, 방정식 (3.17)에서 보듯이, 파

⁴ η 는 중간에 끼인 유전체의 전자기장 임피던스입니다. $\eta = \eta_0(\mu_r/\epsilon_r)^{1/2}$ 인 관계에서 계산할 수 있습니다.

수 진행 방향 (longitudinal direction)에 수직인 평면 방향 (transverse)의 전기장과 자기장 성분은 오로지 $H_{0,z}$ 만 알고 있으면 다 계산할 수 있습니다. 그러면 어떻게 구할까요? 방정식 (3.16)을 유도한 것처럼, 헬름홀츠 파동 방정식을 이용하면 됩니다. 즉, $\frac{\partial^2 H_{0,z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{0,z}}{\partial y^2} + k_c^2 H_{0,z} = 0$ 에서 계산할 수 것입니다. 이 방정식은 \hat{y} 방향으로 특성이 일정하다고 시스템을 설정된 조건을 이용하면 $\frac{\partial^2 H_{0,z}}{\partial x^2} + k_c^2 H_{0,z} = 0$ 로 더 단순하게 만들 수 있습니다. 당연히 이 방정식의 해는 $H_{0,z}(x) = A \sin(k_c x) + B \cos(k_c x)$ 의 형태가 될 것입니다. 아직 모르는 계수 A 와 B 를 결정하기 위해, 경계 조건을 활용해 봅시다. 우선, 병렬하는 도전판과 중간의 유전체 간의 계면에서는 전기장이 0이 되어야 합니다. 즉, 아래의 관계식을 유도할 수 있겠습니다.

$$E_{0,y} \Big|_{x=0, 2d} = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_{0,z}}{\partial x} \Big|_{x=0, 2d} = -\frac{j\omega\mu}{k_c} [A \cos(k_c x) - B \sin(k_c x)] \Big|_{x=0, 2d} = 0. \quad (3.18)$$

방정식 (3.18)로부터, $A=0$ 이고 $k_c 2d = n\pi$, $n=1, 2, 3, \dots$ 이라는 것을 알 수 있습니다. $n=0$ 일 경우에는, 전기장 자체가 0이 되어 버리므로, 물리적으로 의미 없는 해가 되는 것도 유의해서 관찰해 주시기 바랍니다. 따라서, TE 모드에서 실제로 도파관 내부에서 진행하는 전자기장의 진행 파수 β_n 는 $k_c^2 = k^2 - \beta^2$ 의 관계에서 아래와 같이 표현될 수 있을 것입니다.

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{2d}\right)^2}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

이제, $H_{0,z}(x) = B \cos\left(\frac{n\pi}{2d}x\right)$ 의 형태를 찾았으므로, 나머지 전자기장의 성분도 아래와 같이 다 찾을 수 있을 것입니다.

$$\begin{aligned}
H_y &= -\frac{j\beta_n}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0, \\
H_x &= -\frac{j\beta_n}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{j\beta_n}{k_c} B \sin\left(\frac{n\pi}{2d}x\right) \exp(-j\beta_n z), \\
E_y &= -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{j\omega\mu}{k_c} B \sin\left(\frac{n\pi}{2d}x\right) \exp(-j\beta_n z), \\
E_x &= -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0, \\
E_z &= 0.
\end{aligned}$$

위 식에서, $n=0$ 일 경우, $H_{0,z} = B$ 이지만, 나머지 전자기장 성분은 전부 0이 되기 때문에, 물리적으로 불가능해지는 경우가 나오는 것을 확인해 주시기 바랍니다. 따라서, $n=0$ 인 경우는 TE 모드에서는 허용되지 않습니다. 위 관계식을 이용하면, TE 모드에서의 전자기장 임피던스 Z_{TE} 도 $Z_{TE} = -\frac{E_{0,y}}{H_{0,x}}$ 의 관계에서 $Z_{TE} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \eta \frac{k}{\beta}$ 임을 알 수 있습니다.

마찬가지로, **TM 모드**를 계산해 봅시다. $E_{0,z} \neq 0$ 이고 $H_{0,z} = 0$ 인 조건을 활용할 수 있으므로, 방정식 (4.14)로부터, 아래의 관계식을 발견할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
H_{0,x} &= \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_{0,z}}{\partial y}, \quad H_{0,y} = \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_{0,z}}{\partial x}, \\
E_{0,x} &= \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_{0,z}}{\partial x}, \quad E_{0,y} = \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_{0,z}}{\partial y}, \quad k_c^2 \equiv k^2 - \beta^2.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

TE 모드와 마찬가지로, 방정식 (3.19)에서 $E_{0,z}$ 에 대한 헬름홀쯔 파동 방정식 $\frac{\partial^2 E_{0,z}}{\partial x^2} + k_c^2 E_{0,z} = 0$ 을 구할 수 있습니다. 두 도전판의 경계 조건을 활용하면, 이 방정식의 해는 $E_{0,z}(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{2d}x\right)$, $n=0, 1, 2, 3, \dots$ 와 같이 쓸 수 있을 것이며, TE 모드와는 다르게, $n=0$ 인 경우도 허용이 되는 것을 유의해서 관찰해 주시기 바랍니다. 왜냐하면, $n=0$ 인 경우는 $E_{0,z}(x)$ 를 상수라고 설정하면 되기 때문입니다. 이 경우, $n=0$ 에서, $k_c = 0$ 이기 때문에, $\frac{\partial^2 E_{0,z}}{\partial x^2} + k_c^2 E_{0,z} = 0$ 는 만족됩니다. 사실, 상수의 $E_{0,z}(x)$ 가 갖는 물리적 의미는, TM 모드라기 보다는, TEM 모드와 같은 의미라고 볼 수 있습니다. TM 모드에서 실제로 도파관 내부에서 진행하는 전자기장의 진행 파수 β_n 는 $k_c^2 = k^2 - \beta^2$ 의 관계에서 아래와 같

이 표현될 수 있을 것입니다. TE 모드에서 발견한 파수와 같은 모양입니다.

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{2d}\right)^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

이제, $E_{0,z}(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{2d}x\right)$ 의 형태를 찾았으므로, 나머지 전자기장의 성분도 아래와 같이 다 찾을 수 있을 것입니다.

$$\begin{aligned} H_y &= -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c} A \cos\left(\frac{n\pi}{2d}x\right) \exp(-j\beta_n z), \\ H_x &= -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0, \\ H_z &= 0, \\ E_y &= -\frac{j\beta_n}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0, \\ E_x &= -\frac{j\beta_n}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{j\beta_n}{k_c} A \cos\left(\frac{n\pi}{2d}x\right) \exp(-j\beta_n z). \end{aligned}$$

위 관계식에서, $n=0$ 인 경우, $E_{0,z} = H_x = H_z = E_y = 0$ 이지만, $E_x = -A \frac{j\beta_n}{k_c} \exp(-j\beta_n z)$.

와 $H_y = -A \frac{j\omega\epsilon}{k_c} \exp(-j\beta_n z)$ 의 짝이 생기므로, $n=0$ 인 경우는 물리적으로는 가능한 경우임을 주목해 주시기 바랍니다. 이것이 병렬판 도파관에서 TE와 TM 모드의 주요한 차이점입니다. 또한, TM 모드의 전자기장 임피던스 Z_{TM} 역시, $Z_{TM} = E_{0,x}/H_{0,y} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = \eta \frac{\beta}{k}$ 같이 구할 수 있습니다. TE 모드에서의 임피던스 Z_{TE} 와 같은 모양입니다.

3.2.2. 직사각형 도파관 (Rectangular waveguide)

위에서 살펴 본 병렬판 도파관은 빛을 얇은 영역에는 가둘 수 있으나, 얇은 매질의 평면 방향으로서는 가둘 수는 없었습니다. 만약, 빛이 진행하는 방향에 수직인 평면의 모든 방향으로 가둘 수 있다면 어떨까요? 훨씬 광도파로서의 효과가 더 좋을 것 같지 않습니까?

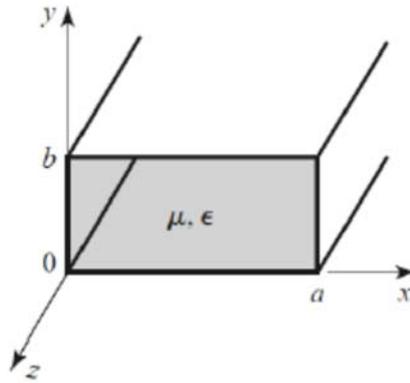


그림 3.10. 직사각형 도파관의 모식도

예를 들면, 그림 3.10에 나온 것 같이, 빛이 주로 \hat{z} 방향으로 진행할 때, \hat{x} 와 \hat{y} 방향으로 새어 나가지 못하게 막는다면, 신호 전송에 효과적일 것으로 예상할 수 있을 것입니다. 사실 **직사각형 도파관 (Rectangular waveguide)**은 앞서 살펴 본 병렬판 도파관의 경우를 한 차원 더 추가적으로 고려한 케이스에 지나지 않습니다. 위에서 분석했던 방정식들을 조금만 더 확장하면 된다는 이야기입니다. 한 가지 유념할 부분은, 앞서 살펴 본 병렬판 도파관에서 TEM 모드가 존재했던 것에 대비하여, **직사각형 도파관에서는 TEM 모드가 허용되지 않는다**는 점입니다. 병렬판 도파관에서 유도한 라플라스 방정식은 두 도전판 사이에 한 방향으로 전기장 포텐셜이 걸려 있는 결과가 도출되었지만, 직사각형 도파관에서는 도전판이 한 바퀴 빙 둘러서 다 연결된 상태이므로, 0보다 큰 전기장 포텐셜이 걸릴 수가 없습니다.⁵ 사실 직사각형 도파관 뿐만 아니라, 원형이든 타원형이든 한 바퀴 빙 둘러서 연결된 형태의 도파관은 모두 TEM 모드를 허용하지 않습니다. 따라서, 직사각형 도파관에서는 TE, TM, Hybrid 모드만 허용될 수 있습니다.

그러면, 먼저 TE 모드부터 살펴 봅시다. 일단 방정식 (3.17)로부터 $\frac{\partial^2 H_{0,z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{0,z}}{\partial y^2} + k_c^2 H_{0,z} = 0$ 입니다. 병렬판 도파관과는 달리, 직사각형 도파관의 경우, y 방향으로 유전 상수가 일정하다는 가정을 할 수가 없으니, 여기서 더 방정식의 형태를

⁵예를 들어 평행한 금속판 두 개 사이를 띄워서 축전기를 만든다고 했을 때, 위 판은 양극, 아래 판은 음극으로 작동할 수 있지만, 금속판 사이에 또 다른 금속판을 두 개 더 연결해서, 아예 금속판끼리 다 연결되어 버리면 어느쪽이 양극 음극이 될 지 결정할 수 없기 때문에, 전기장 포텐셜이 걸릴 수가 없는 것입니다.

단순하게 만드는 것은 불가능합니다. 대신, 이런 종류의 2차원 헬름홀츠 방정식은 x 와 y 방향의 성분이 서로 독립이라는 가정을 하면, 변수분리법, 즉 $H_{0,z}(x,y) = X(x)Y(y)$ 같은 해의 형태를 활용하여 쉽게 계산할 수 있습니다.⁶ 그러면, $\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_c^2 = 0$ 형태의 헬름홀츠 방정식을 얻을 수 있습니다. 이제, 각 방향에 대해 따로따로 해를 구해 봅시다. 이를 위해 $k_c^2 = k_{xc}^2 + k_{yc}^2$ 라고 설정해 보겠습니다. 그렇다면, x 방향에 대한 방정식과 y 방향에 대한 방정식을 각각 $\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_{xc}^2 = 0$ 와 $\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_{yc}^2 = 0$ 처럼 분리할 수 있을 것입니다. 각 방정식의 일반해는 $X(x) = A \cos(k_{xc}x) + B \sin(k_{xc}x)$ 와 $Y(y) = C \cos(k_{yc}y) + D \sin(k_{yc}y)$ 같이 표현할 수 있습니다. 이제, 아직 모르는 계수 $[A, B, C, D]$ 를 찾아내기 위해, 매질 사이의 경계 조건을 활용해야 합니다. 먼저 $E_{0,y}$ 의 경우, $E_{0,y}(0,y) = 0$ 이어야 하므로, $B = 0$ 임을 발견할 수 있습니다. 또한, $E_{0,y}(a,y) = 0$ 이어야 하므로, $k_{xc}a = m\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$ 임도 발견할 수 있습니다. 마찬가지로, $E_{0,x}$ 의 경우에 대해서도 경계 조건을 적용하면, $D = 0$ 와 $k_{yc}b = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 임을 발견할 수 있습니다. 이를 이용하면,

$$H_{0,z}(x,y) = X(x)Y(y) = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, A_{mn} = AC. \quad (3.20)$$

임을 알 수 있습니다. 나머지 직사각형 광도파로의 TE 모드 전자기장 성분은 아래와 같이 찾을 수 있습니다.

⁶3장에서 살펴 본 것처럼, 변수분리법으로 계산된 해가, 원래의 미분방정식을 만족시킨다면, 그 해는 유일한 해일 것이므로, 변수분리법의 정당성이 성립되는 것입니다.

$$\begin{aligned}
E_{0,x}(x,y) &= \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\
E_{0,y}(x,y) &= -\frac{j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\
H_{0,x}(x,y) &= \frac{j\beta_{mn} m\pi}{k_c^2 a} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\
H_{0,y}(x,y) &= \frac{j\beta_{mn} n\pi}{k_c^2 b} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\
\beta_{mn} &= \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad E_{0,z}(x,y) = 0.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

방정식 (4.21)에서 자동적으로, $\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - k_c^2} > 0$ 이어야 하므로,⁷ $k > k_c$ 이고, $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 에서, 컷오프 (cut-off) 각주파수 ω_{mn} 를 다음과 같이 찾을 수 있습니다.

$$\omega_{mn} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

위의 컷오프 각주파수 관계식이 물리적으로 의미하는 바는 이렇습니다. 예를 들어, 만약 $(m,n) = (0,0)$ 이면 어떨까요? 다시 말해, 이 경우 TE₀₀ 모드는 존재할 수 있을까요? $(m,n) = (0,0)$ 이면 $\omega_{00} = 0$ 이라는 의미입니다. 이 경우, 모든 주파수가 TE₀₀ 모드로 존재할 수 있다는 의미이므로, 오히려 광도파 모드가 존재하지 않음을 의미합니다. 광도파 모드로 존재할 수 있는 주파수의 범위가 한계가 있는데, 무한히 작은 주파수가 다 도파될 수 있다면, 다 도파되지 않는 것과 같은 의미인 것을 생각하면 됩니다. 그러면 그 다음 컷오프 각주파수는 어떤 값이 될까요? 이를 위해 임의로 $a > b$ 라고 설정해 봅시다. 그리고 나서, 일단 TE₁₀ 모드에 대해 생각해 봅시다. 이 경우, $\omega_{10} = \frac{\pi}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$ 일 것입니다. 또한,

TE₀₁ 모드에 대해서는 $\omega_{01} = \frac{\pi}{b\sqrt{\mu\epsilon}}$ 일 것입니다. 그런데, $a > b$ 라고 했으므로, $\omega_{10} < \omega_{01}$ 입

니다. 따라서, TE 모드에서 처음으로 광도파 모드가 형성되는 외부 입사광의 각주파수는 ω_{10} 를 넘고 나서야 발견될 것입니다. TE₂₀ 모드를 추가적으로 살펴 봅시다. 이 경우,

⁷여기서, β_{mn} 를 위상 상수 (phase constant)라고도 합니다.

$\omega_{20} = \frac{2\pi}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}$ 입니다. 만약, $a > 2b$ 이기까지 하다면, $\omega_{20} < \omega_{01}$ 일 것입니다. 그렇다면, 최초로 TE 모드에서 광도파 모드가 형성되는 각주파수의 범위는 $\omega_{10} < \omega < \omega_{20}$ 이 될 것입니다. 이 때의 각주파수 범위에서 추출되는 밴드폭 (bandwidth), $\Delta\omega$ 는 $\Delta\omega = \omega_{20} - \omega_{10}$ 로 정의되며, $\Delta\omega = \frac{\pi}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}$ 로 표현됨을 알 수 있습니다. 반대로, $a < 2b$ 인 조건에서라면, 각주파수의 범위는 $\omega_{10} < \omega < \omega_{01}$ 이 될 것이며, 따라서 $\Delta\omega = \omega_{01} - \omega_{10} = \frac{\pi(a-b)}{ab\sqrt{\mu\varepsilon}}$ 일 것입니다. 이로 부터, β_{mn} 역시 $\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - k_c^2}$ 의 관계에서, $a < 2b$ 인 경우, $\beta_1 \equiv \beta_{10} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$ 와 $\beta_2 \equiv \beta_{01} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$ 등으로 표시될 수 있음을 알 수 있습니다. 또한, 유효 굴절률 n_{eff} 역시, $\beta = k_0 n_{eff}$ 를 이용하면, $n_{eff,1} = \frac{\beta_1 c_0}{\omega}$ 와 $n_{eff,2} = \frac{\beta_2 c_0}{\omega}$ 등으로 표현될 수 있을 것입니다. 그림 3.11에는 β_1 , β_2 , $n_{eff,1}$, $n_{eff,2}$ 이 $\omega/2\pi$ 의 함수로 계산된 결과를 보였습니다.

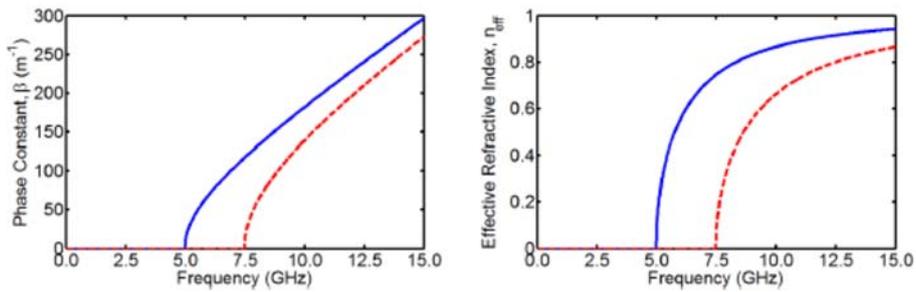


그림 3.11. 직사각형 도파관에서 TE 모드로 도파되는 전자기파에 대해, 위상 상수 (β_1 , β_2)와 유효 굴절률 ($n_{eff,1}$, $n_{eff,2}$)이 외부 입사광의 주파수 $\omega/2\pi$ 에 따라 변하는 양상 계산도

TM 모드도 마찬가지로 광도파 모드를 찾을 수 있습니다. 비슷한 과정을 거쳐, 아래의 관계식을 찾을 수 있습니다.

$$E_{0,z}(x, y) = B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \quad (3.22)$$

나머지 전자기장 성분도 아래와 같이 찾을 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
H_{0,x}(x,y) &= \frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 b} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\
H_{0,y}(x,y) &= -\frac{j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 a} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\
E_{0,x}(x,y) &= \frac{j\beta_{mn} m\pi}{k_c^2 a} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\
E_{0,y}(x,y) &= \frac{j\beta_{mn} n\pi}{k_c^2 b} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\
\beta_{mn} &= \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad H_{0,z}(x,y) = 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

TE 모드와 동일하게, 컷오프 각주파수 ω_{mn} 도 다음과 같이 찾을 수 있습니다.

$$\omega_{mn} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

방정식 (3.22)에서 볼 수 있듯, $m=0$ 이나 $n=0$ 이면, TM 모드에서도 광도파 모드가 형성되지 않습니다. 따라서, 최초의 컷오프 각주파수는 $\omega_{11} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}$ 이 될 것입니다.

위상 상수 역시, $\beta_1 \equiv \beta_{11} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$ 이 될 것입니다.

TM 모드의 최초 컷오프 각주파수 $\omega_{11} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}$ 와 TE 모드의 최초 컷오프

각주파수 $\omega_{11} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2}$ 를 비교해 보면, TE 모드의 컷오프가 더 작은 것을 알 수 있

습니다. 따라서, TE₀₁ 모드를 **기본 모드 (fundamental mode)**라고 부를 수 있겠습니다. 사실 기본 모드는 물리적으로도 굉장히 중요합니다. 왜냐하면, 여러 광도파로 모드 중에서도 가장 먼저 나타나고, 가장 많은 전자기파 에너지를 전달할 수 있기 때문입니다.

3.2.3. 평판 광도파로 (slab waveguide)

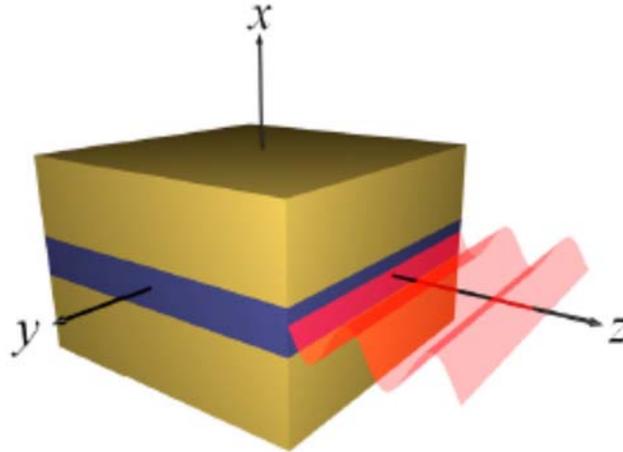


그림 3.12. 평판 광도파로 (slab waveguide)의 모식도

앞서 살펴 본 두 가지 경우의 도파관에서는, 유전체가 1차원 혹은 2차원에서 금속 같은 도전판으로 둘러 싸인 경우에 대한 광도파 모드 분석을 해 봤습니다. 그렇지만, 광섬유 같은 광도파로는 겹질 (cladding) 재료와 속심 (core) 재료 모두 유전체로만 이루어 집니다. 이런 경우는 어떻게 해석해 볼 수 있을까요? 도전판이 아니기 때문에, 매질 간의 경계면에서 전자기장의 성분을 0으로 놓을 수 없기 때문에, 보다 복잡한 모양의 광도파 모드가 형성될 것입니다. 이번 절에서는, 유전체로만 이루어진 광도파로 중에서 가장 간단한 형태인 **평판 광도파로 (slab waveguide)**에 대한 공부를 하도록 하겠습니다. 그림 4.12에는 평판 광도파로의 개략적인 형태가 그려져 있습니다. 이러한 형태의 평판 광도파로는 광섬유를 평판으로 만든 것이라고 생각해도 무방합니다. 파란색 매질은 고 굴절률의 속심, 노란색의 매질은 저 굴절률의 겹질 (cladding)이고, 전자기파는 속심에만 국재되어 \hat{z} 방향으로만 진행하는 상황을 생각해 보겠습니다. 파란색 속심의 위 아래 매질이 같은 유전 상수를 가질 때는, 이러한 광도파로를 **대칭형 평판 광도파로 (symmetric slab waveguide)**라고 부릅니다.

이 시스템에서는, 계산의 편의를 위해, 전자기파는 \hat{y} 방향으로의 변화가 없다고 설정할 수 있습니다. 그렇다면, $\partial/\partial y$ 와 관련된 항들은 모두 0으로 놓을 수 있을 것입니다. 그러면 방정식 (3.12)은 더욱 단순하게 아래와 같이 쓸 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
 j\beta E_{0,y} &= -j\omega\mu H_{0,x}, & -j\beta E_{0,x} - \frac{\partial E_{0,z}}{\partial x} &= -j\omega\mu H_{0,y}, & \frac{\partial E_{0,y}}{\partial x} &= -j\omega\mu H_{0,z}, \\
 j\beta H_{0,y} &= j\omega\epsilon E_{0,x}, & -j\beta H_{0,x} - \frac{\partial H_{0,z}}{\partial x} &= j\omega\epsilon E_{0,y}, & \frac{\partial H_{0,y}}{\partial x} &= j\omega\epsilon E_{0,z}.
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

방정식 (3.24)에 나온 여섯 개의 관계식은 TE 모드나 TM 모드로 그룹을 지으면 세 개씩 묶이게 될 것입니다. 예를 들어, TE 모드일 경우라면, 아래의 연립 방정식이 전자기장 성분 중, $[E_{0,y}, H_{0,x}, H_{0,z}]$ 에만 관여하고 있는 사실에서 보듯, $[E_{0,y}, H_{0,x}, H_{0,z}]$ 의 전자기장 성분만 고려하면 되는데, 이는 마치 성분이 $E_{0,z} = 0$ 인 조건에서 방정식 (3.24)이 더 단순화된 것 같은 효과입니다.

$$j\beta E_{0,y} = -j\omega\mu H_{0,x}, \quad -j\beta H_{0,x} - \frac{\partial H_{0,z}}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_{0,y}, \quad \frac{\partial E_{0,y}}{\partial x} = -j\omega\mu H_{0,z}$$

또한, TM 모드일 경우도 마찬가지로, 아래의 연립 방정식이 전자기장 성분 중, $[H_{0,y}, E_{0,x}, E_{0,z}]$ 에만 관여하고 있는 사실에서 보듯, $[H_{0,y}, E_{0,x}, E_{0,z}]$ 의 전자기장 성분만 고려하면 되는데, 이는 마치 성분이 $H_{0,z} = 0$ 인 조건에서 방정식 (3.24)이 더 단순화된 것 같은 효과입니다.

$$j\beta H_{0,y} = j\omega\varepsilon E_{0,x}, \quad -j\beta E_{0,x} - \frac{\partial E_{0,z}}{\partial x} = -j\omega\mu H_{0,y}, \quad \frac{\partial H_{0,y}}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_{0,z}$$

이제, **TE 모드**를 살펴 봅시다. 이 경우 $E_{0,z} = 0$ 이므로, 앞서 살펴 보았듯, 아래의 관계식들만 고려하면 됩니다.

$$\begin{aligned} j\beta E_{0,y} &= -j\omega\mu H_{0,x}, \\ -j\beta H_{0,x} - \frac{\partial H_{0,z}}{\partial x} &= j\omega\varepsilon E_{0,y}, \\ \frac{\partial E_{0,y}}{\partial x} &= -j\omega\mu H_{0,z}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

위 방정식에서, $H_{0,x}$ 와 $H_{0,z}$ 를 $E_{0,y}$ 에 대해 쓰면, $E_{0,y}$ 에 대한 파동 방정식 $\frac{\partial^2 E_{0,y}}{\partial x^2} + k_c^2 E_{0,y} = 0$, $k_c^2 = k^2 - \beta^2$ 을 유도할 수 있습니다. 이 파동 방정식을 경계 조건을 활용하여 풀면 되겠습니다. 속심과 껍질에 대해 각각 파동 방정식을 아래와 같이 각 층 (즉, 위 아래의 cladding과 중간의 core 층에 대해 각각) 다시 써 보겠습니다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_{0,y}}{\partial x^2} - r^2 E_{0,y} &= 0, \quad r^2 = \beta^2 - k_0^2 n_3^2, \quad x \leq 0, \\
\frac{\partial^2 E_{0,y}}{\partial x^2} + q^2 E_{0,y} &= 0, \quad q^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2, \quad 0 \leq x \leq 2d \\
\frac{\partial^2 E_{0,y}}{\partial x^2} - p^2 E_{0,y} &= 0, \quad p^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2, \quad x \geq 2d.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

방정식 (3.21)는 각 층에 대해 $E_{0,y}$ 에 대한 파동 방정식을 반복해서 쓴 것에 불과합니다. 겹질 매질로 전자기파가 다 빠져 나가면, 결국 속심에서 진행하던 전자기파의 신호는 다 손실될 것이니, 속심에만 국한시킨다는 광도파로의 목적에 부합할 수 없습니다. 이러한 표현이 물리적으로 말이 되기 위해서는, 자동적으로 $k_0^2 n_1^2 \geq \beta^2 \geq k_0^2 n_2^2 \geq k_0^2 n_3^2$ 의 관계가 만족되어야 할 것입니다 (여기서, 임의로 $n_2 \geq n_3$ 라고 가정). 방정식 (3.26)을 각각, 이러한 물리적 의미를 새기면서, 이제 미분방정식의 해를, 계면에서의 연속성 조건을 활용하여, 구해 보겠습니다.

$$E_{0,y} = \begin{cases} A \exp(rx), & x \leq 0 \\ A \cos(qx) + B \sin(qx), & 0 \leq x \leq 2d \\ [A \cos(2dq) + B \sin(2dq)] \exp(-p(x-2d)), & x \geq 2d \end{cases} . \tag{3.27}$$

아직 활용하지 않은 계면에서의 경계 조건이 있습니다. 네. 그렇습니다. $H_{0,z}$ 입니다. 즉, 2장에서 살펴 본 바와 같이, 계면에 수평인 자기장 성분 $H_{0,z}$ 가 계면의 양쪽 매질에서 모두 같아야 하는 것입니다. 방정식 (3.27)에서 $E_{0,y}$ 를 구했으므로, $\frac{\partial E_{0,y}}{\partial x} = -j\omega\mu H_{0,z}$ 의 관계에서, 아래의 관계식을 찾을 수 있습니다.

$$H_{0,z} = \frac{j}{\omega\mu} \begin{cases} rA \exp(rx), & x \leq 0 \\ q(-A \sin(qx) + B \cos(qx)), & 0 \leq x \leq 2d \\ -p[A \cos(2dq) + B \sin(2dq)] \exp(-p(x-2d)), & x \geq 2d \end{cases} . \tag{3.28}$$

경계 조건에 의해, 일단 $x=0$ 위치의 계면에서, $rA = qB$ 이어야 합니다. 또한, $x=2d$ 위치의 계면에서는, $q(-A \sin(2dq) + B \cos(2dq)) = -p[A \cos(2dq) + B \sin(2dq)]$ 이어야 합니다. 따라서, 이 두 관계식을 종합하면, 아래의 관계식을 찾을 수 있습니다.

$$\tan(2dq) = \frac{q(p+r)}{q^2 - pr}. \tag{3.29}$$

유감스럽게도, 방정식 (3.29)까지 오면, 더 이상 해석적인 방법으로 β 를 구하는 것은 불가능합니다. 비선형 방정식을 뉴턴 방법 (Newton method) 등 수치해석적으로 풀거나, 아예 유한 차분법 (finite difference method, FDM) 같은 방법으로 풀어야 합니다. 다만, 방정식 (4.29)는 위와 아래 껍질이 같은 매질일 경우 (즉, $p=r$ 일 경우, 이러한 경우를 symmetric slab waveguide라고 합니다), $\tan(2dq) = \frac{2pq}{q^2 - p^2}$ 같이 조금 더 간단해질 수 있습니다.

방정식 (3.29)가 의미하는 것은 무엇일까요? 결국, 이 관계식을 만족시키는 p, q, r 값에는 한계가 있다는 것입니다. 즉, 광도파로에 허용할 수 있는 **광도파 모드 (waveguide mode)의 개수가 유한하다**는 의미입니다. 왜 그런지 알아 봅시다. 우선, 개념을 잡기 위해, 비교적 간단한 경우인 symmetric slab waveguide을 중심으로 생각해 봅시다. 일단 관계식 $\tan(2dq) = \frac{2pq}{q^2 - p^2}$ 에서, $\tan(2x) = \frac{2\cos(x)\sin(x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)}$ 인 삼각함수 관계를 이용하면, $\tan(dq) = \frac{p}{q}$ 혹은 $-\cot(dq) = \frac{p}{q}$ 인 것을 알 수 있습니다. 또한, core 매질에 대하여, $\beta^2 + q^2 = k_0^2 n_1^2 = \omega^2 \mu_1 \epsilon_1$ 이고, cladding 매질에 대하여 $\beta^2 - p^2 = k_0^2 n_2^2 = \omega^2 \mu_2 \epsilon_2$ 임을 이용하면, 두 매질 모두 비자성물질임을 가정하여 (즉, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$), $q^2 + p^2 = \omega^2 \mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2)$ 인 것도 알 수 있습니다. 따라서, $\left\{ \begin{array}{l} \tan(dq) \\ -\cot(dq) \end{array} \right\} = \frac{p}{q} = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2) d^2}{(dq)^2} - 1}$ 입니다. Core 매질에서의 파수 보존 법칙, 즉, $\beta^2 + q^2 = k_0^2 n_1^2 = k_1^2 = k_{z1}^2 + k_{x1}^2$ 을 이용하면, 사실 q 는 k_{x1} 에 해당함을 알 수 있습니다. 이런 의미에서 $q = k_{x1}$ 라고 표현해 봅시다. 그러면 $\left\{ \begin{array}{l} \tan(k_{x1}d) \\ -\cot(k_{x1}d) \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2) d^2}{(k_{x1}d)^2} - 1}$ 이 될 것입니다. 또한, tan/cot 함수는 주기 함수이므로, $\left\{ \begin{array}{l} \tan(k_{x1}d) = \tan(k_{x1}d - N\pi) \\ -\cot(k_{x1}d) = \cot(k_{x1}d - N\pi) \end{array} \right\}$ 입니다. 따라서, $\left\{ \begin{array}{l} \tan(k_{x1}d - N\pi) \\ -\cot(k_{x1}d - N\pi) \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2) d^2}{(k_{x1}d)^2} - 1}$ 입니다. 비록 이 관계식의 해석적 해를 구할 수는 없지만, 좌변항과 우변항을 각각 $k_{x1}d$ 에 대한 함수로 그래프를 그리면, 두 항의 그래프가 만나는 지점이 생길 것입니다. 그 지점의 개수만큼 모드의 총-개수 N 도 정해질 것입니다. 그림 3.13에는 이러한 개념으로 광도파로의 TE 모드를 찾는 방법에 대한 예시가 나타나 있습니다.

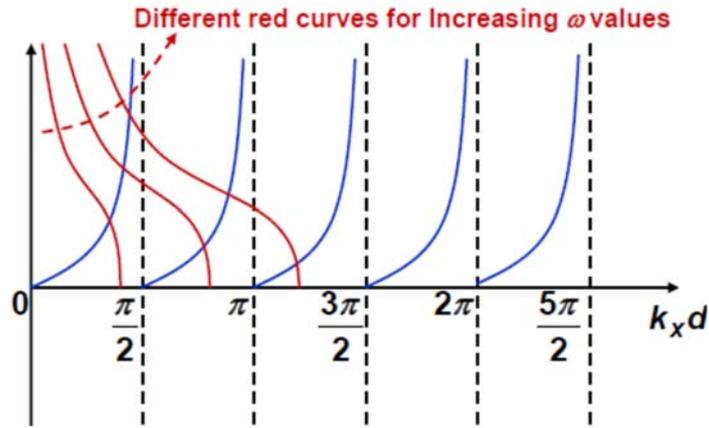


그림 3.13. 그래프 방법으로 평판 광도파로의 TE 모드를 찾는 방법의 모식도

그림 3.13에서 파란색 그래프는 N 에 따라 표시된 좌변항, 붉은색 그래프는 ω 가 주어졌을 때, 우변항을 나타냅니다. 위의 그래프에서 보듯, 그래프가 만나게 되는 x 축의 좌표를 알게 되면, 광도파되는 (즉, 속심에 국재되는) 파수 k_{x1} 도 찾을 수 있습니다. 광도파되는 파수 k_{x1} 는 \tan 혹은 \cot 함수의 특성 상, 항상 $(m-1)\frac{\pi}{2} \leq k_{x1}d \leq m\frac{\pi}{2}$, $m=1, 2, 3, \dots$ 의 범위에 항상 위치하게 될 것입니다. 임의의 자연수 m 에 대해, 이러한 범위를 만족시키는 광도파 모드를 **m번째 TE 광도파 모드 (the m-th TE mode, TE_m mode)** 라고 부릅니다. TE_m 모드가 어쨌든 존재하려면, $(m-1)\frac{\pi}{2} \leq k_{x1}d$ 이어야 하는 조건을 생각해 봅시다. 즉, $(m-1)\frac{\pi}{2} = k_{x1}d$ 일 때, TE_m 모드가 존재할 수 있는 컷오프 (cut-off) 조건을 정의할 수 있는 것입니다. 다시 말해, 만약 $(m-1)\frac{\pi}{2} > k_{x1}d$ 이라면, TE_m 모드는 존재할 수 없고, 최대 TE_{m-1} 모드까지만 존재할 수 있다는 의미입니다. 그림 3.13에서 보듯, $k_{x1}d$ 의 값은 붉은색 그래프의 위치에 따라 정해질 것이므로, 물리적으로는 외부 입사 주파수 ω 에 따라, 최대 광도파 모드가 정해질 것이고, 따라서 우리는 컷오프 각주파수 ω_m 를 다음과 같이 정의할 수 있습니다.

$$\omega_m = \frac{(m-1)\pi}{2d\sqrt{\mu_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)}}$$

컷오프 각주파수의 물리적인 의미를 조금 더 살펴 봅시다. 평판 광도파로 역시 빛을 가

뒤 두면서 유도하기 위해 내부전반사의 원리를 이용했던 것을 떠올려 봅시다. 대칭형 평판 광도파로의 경우에 대해, 특정한 광도파 모드의 진행 각도를 θ_i 라고 설정하면, 일단 내부전반사 조건을 만족시키기 위해서는 아래의 관계식이 성립해야 합니다.

$$\theta_i > \theta_c \rightarrow \sin(\theta_i) > \sin(\theta_c) = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$$

또한, 파수 보존 법칙으로부터 $\sin(\theta_i) = k_{x1}/\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1} = \sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_1 - k_{x1}^2}/\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}$ 이므로, 위의 내부전반사 조건과 결합하면 $\sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_1 - k_{x1}^2} > \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}$ 임을 알 수 있고, 이를 단순화하면 $\omega > \frac{k_{x1}}{\sqrt{\mu_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}}$ 인 조건이 만족되어야 하는 것을 알 수 있을 것입니다. \mathbf{TE}_m 모드가 존재

하려면, k_{x1} 는 최소 $\frac{(m-1)\pi}{2d}$ 는 되어야 합니다. 그렇다면, \mathbf{TE}_m 모드가 존재하려면, 외부 각주파수는 최소 $\frac{(m-1)\pi}{2d\sqrt{\mu_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}}$ 는 되어야 하는 것을 알 수 있습니다. 이 값은 바로 위에

서 찾은 컷오프 각주파수 ω_m 와 동일한 모양임을 알 수 있습니다. 물리적으로는 외부 각주파수가 컷오프 각주파수보다 크기만 하면, 이론적으로는 입사광이 속심 속에 국재되어 광도파될 수 있지만, 사실 입사되는 각주파수가 ω_m 보다 아주 약간만 더 큰 상황이라면, 껍질 매질까지 꽤 멀리 투과되는 현상이 생깁니다. 이 경우, 껍질 매질 속으로의 투과 길이가 지나치게 깊으면, 속심으로만 국재시키려는 성능이 떨어질 수 있습니다. 따라서 컷오프는 진짜 컷오프일 뿐입니다.

그렇다면, 애초에 광도파로에 국재될 수 있는 모드는 최대 몇 개까지가 가능한 것일까요? 먼저, 일반적인 비대칭형 평판 광도파로에 대해, TE 모드에서 $\beta^2 \geq k_0^2 n_2^2 \geq k_0^2 n_3^2$ 라고 설정했던 것을 기억해 봅시다. 그렇다면 $\beta_{\min} = k_0 n_2$ 입니다. 따라서, $\beta = \beta_{\min}$ 일 때, 모드의 개수도 최대가 될 것입니다. 따라서 방정식 (4.29)로부터, 다음의 관계식이 도출됩니다.

$$\tan\left(2dk_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} - N\pi\right) = \left(\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}\right)^{1/2}. \quad (3.30)$$

따라서, TE 모드에서 광도파로에 국한될 수 있는 모드 개수, 즉, N 의 최대값 $N_{\max, TE}$ 은 아래와 같이 계산될 수 있습니다.

$$N_{\max,TE} = \text{int} \left(\frac{1}{\pi} \left(2dk_0 (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} - \tan^{-1} \left(\left(\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{1/2} \right) \right) \right). \quad (3.31)$$

방정식 (3.31)에서 $\text{int}(X)$ 는 임의의 실수 X 보다 큰 정수 중 가장 작은 수를 의미합니다.

마찬가지로 **TM 모드**는 방정식 (4.24) 중, 아래의 관계식만 고려하면 될 것입니다.

$$\begin{aligned} j\beta H_{0,y} &= j\omega\epsilon E_{0,x}, \\ -j\beta E_{0,x} - \frac{\partial E_{0,z}}{\partial x} &= -j\omega\mu H_{0,y}, \\ \frac{\partial H_{0,y}}{\partial x} &= j\omega\epsilon E_{0,z}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

역시, $E_{0,x}$ 와 $E_{0,z}$ 를 $H_{0,y}$ 에 대해 쓰면, $H_{0,y}$ 에 대한 파동 방정식 (헬름홀츠 방정식) $\frac{\partial^2 H_{0,y}}{\partial x^2} + k_c^2 H_{0,y} = 0$ 을 유도할 수 있습니다. TE 모드에서 유도한 방법과 유사한 과정을 거쳐, 아래의 TM 모드 특성 관계식을 얻을 수 있습니다.

$$\tan(2dq) = \frac{qn_1^2(n_3^2 p + n_2^2 r)}{n_2^2 n_3^2 q^2 - n_1^4 pr}. \quad (3.33)$$

대칭형 평판 광도파로의 경우, 위 관계식은 아래와 같이 더 간단한 모양으로 바꿀 수 있습니다.

$$\tan(2dq) = \frac{2qpn_1^2 n_2^2}{n_2^4 q^2 - n_1^4 p^2}.$$

대칭형 평판 광도파로의 TM 모드는 TE 모드에서 살펴 본 바와 비슷한 과정을 거쳐, 아래의 특성 관계식으로 규정될 수 있습니다.

$$\begin{cases} \tan(k_{x1}d) \\ -\cot(k_{x1}d) \end{cases} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sqrt{\frac{\omega^2 \mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2) d^2}{(k_{x1}d)^2} - 1}$$

위의 관계식을 이용하여, TM 모드에서도 광도파 모드를 찾을 수 있습니다. 예를 들어, **m**번째 **TM 광도파 모드** (the **m-th TM mode**, **TM_m mode**)가 어쨌든 존재하려면,

$(m-1)\frac{\pi}{2} \leq k_{x1}d$ 이어야 하는 조건을 생각해 봅시다. 즉, $(m-1)\frac{\pi}{2} = k_{x1}d$ 일 때, \mathbf{TM}_m 모드가 존재할 수 있는 컷오프 조건을 정의할 수 있고, $\omega_m = \frac{(m-1)\pi}{2d\sqrt{\mu_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}}$ 는 TE 모드의 ω_m 과 같습니다. 마찬가지로, TM 모드에서 광도파로에 국한될 수 있는 모드의 최대 개수 $N_{\max, TM}$ 는 아래와 같이 계산될 수 있습니다.

$$N_{\max, TM} = \text{int} \left(\frac{1}{\pi} \left(2dk_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} - \tan^{-1} \left(\frac{n_1^2(n_2^2 - n_3^2)^{1/2}}{n_3^2(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}} \right) \right) \right). \quad (3.34)$$

수치해석적 관점에서는, 평판 광도파로의 도파 모드 계산은 고유치 문제를 푸는 것과 같은 의미입니다. 예를 들어, TE 모드의 경우, $\frac{\partial^2 E_{0,y}}{\partial x^2} + k_c^2 E_{0,y} = 0$, $k_c^2 = k^2 - \beta^2$ 로 정리되었던 헬름홀츠 파동 방정식을 생각해 봅시다. 이 방정식은 x 를 $\tilde{x} \equiv xk_0$ 와 같이 정규화함으로써 아래와 같이 더 간략하게 표시될 수 있습니다.

$$\frac{\partial^2 E_{0,y}}{\partial \tilde{x}^2} + n^2 E_{0,y} = n_{\text{eff}}^2 E_{0,y}, \quad n_{\text{eff}}^2 = \beta^2 / k_0^2. \quad (3.35)$$

이제 위 껍질 매질부터 속심을 거쳐 아래 껍질 매질까지 광도파로 전체 구조를 x -축 방향으로 $\Delta\tilde{x}$ 의 간격을 가지고 잘게 나눈다고 생각해 봅시다. 그리고 잘게 나눈 x -축 상의 지점을 $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_M$ 라고 합시다. 이러한 방식은 유한 차분법 (finite difference method, FDM)에 해당하는 방법입니다. 유한 차분법에서는 2계 도함수 $\frac{\partial^2 E_{0,y}}{\partial \tilde{x}^2}$ 를

$$\left. \frac{\partial^2 E_{0,y}}{\partial \tilde{x}^2} \right|_{\tilde{x}=\tilde{x}_n} \approx \frac{E_{0,y}(\tilde{x}_{n+1}) - 2E_{0,y}(\tilde{x}_n) + E_{0,y}(\tilde{x}_{n-1}))}{(k_0 \Delta\tilde{x})^2}$$

와 같이 근사할 수 있습니다. 이제 방정식 (3.35)에서 유한 차분법을 활용하면, 아래와 같은 행렬 형태로 정리된 헬름홀츠 방정식을 얻을 수 있습니다.

$$(\mathbf{D}_x^2 + \mathbf{n}^2)\mathbf{E}_{0,y} = \mathbf{n}_{\text{eff}}^2\mathbf{E}_{0,y},$$

$$\mathbf{D}_x^2 = \frac{1}{(k_0\Delta\tilde{x})^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \dots & & \\ 0 & 1 & -2 & & & & \\ & \vdots & & -2 & 1 & 0 & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & 0 & 1 & -2 & \end{bmatrix}, \mathbf{n}^2 = \begin{bmatrix} n(\tilde{x}_1)^2 \\ n(\tilde{x}_2)^2 \\ \vdots \\ n(\tilde{x}_M)^2 \end{bmatrix}$$

위의 방정식에서 $(\mathbf{D}_x^2 + \mathbf{n}^2)$ 행렬을 고유치 분해 (eigenvalue decomposition)를 하면, 고유값에 해당하는 $\mathbf{n}_{\text{eff}}^2$ 벡터를 얻을 수 있으며, 각 고유치에 대응하는 고유 벡터 $\mathbf{E}_{0,y}$ 를 계산할 수 있습니다. 이 고유 벡터는 각 모드에 따른 $\mathbf{E}_{0,y}$ 의 국재된 함수 모양, 즉 $E_{0,y}(\tilde{x})$ 을 나타내는 함수로 활용될 것입니다. 그림 3.14에는 TE 모드에 대해, $d = \lambda_0$ 이고 $n_1 = 2, n_2 = n_3 = 1.2$ 일 때, FDM 방법을 통해, 평판 광도파로에 국재될 수 있는 모드를 계산한 예시를 보였습니다.

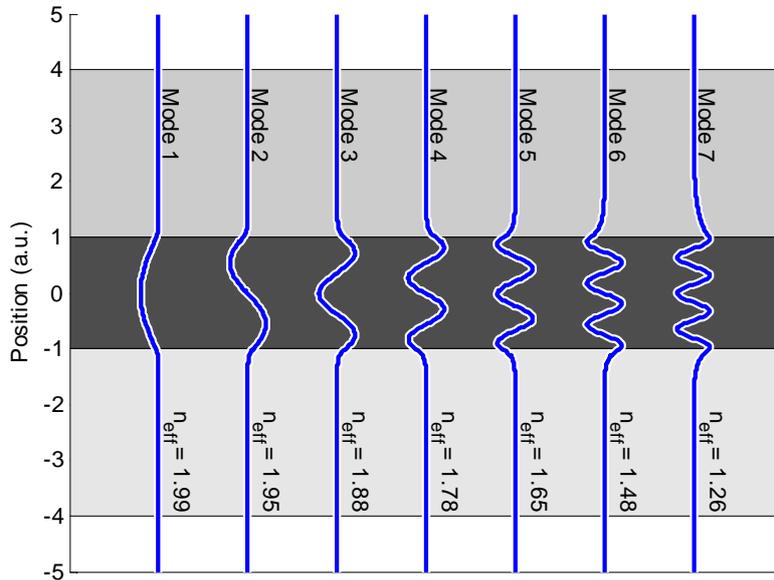


그림 3.14. FDM 방법으로 계산한 TE 모드에서의 평판 광도파로 모드

그림 3.14에서는 x -축의 단위는 외부 입사광의 파장입니다. 짙은 회색으로 표시된 가운데 속심에 총 7개의 TE 광도파로 모드가 형성될 수 있는 것을 알 수 있습니다.

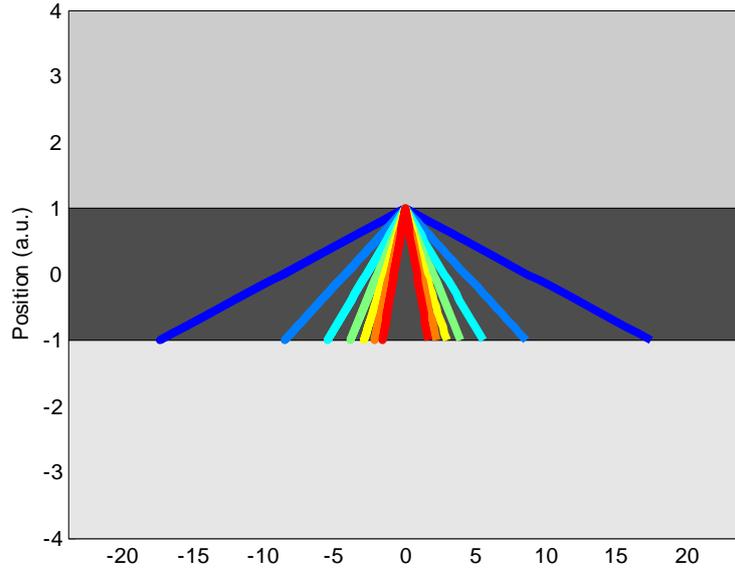


그림 3.15. 수치해석적 방법으로 계산한 평판 광도파로의 TE 모드별 광도파 진행 방향

고유치 분해를 통해, 실제 고유치 벡터를 이용하면 n_{eff} 을 계산할 수 있고, 이를 통해, 각 모드 별로, 실제로 빛이 어떻게 속심에서 유도되는지도 계산할 수 있습니다. 특히, $\beta = k_{x1} = k_0 n_{eff} = k_0 n_1 \sin(\theta)$ 의 관계에서, 빛이 속심에서 진행하는 각도 θ 는 $\sin(\theta) = n_{eff} / n_1$ 로부터 계산할 수 있을 것입니다. 그림 4.15에는 이러한 관계를 이용하여, 각 모드 별로 광도파되는 방향을 보였습니다.

3.2.4. 기타 광도파로

위에서 알아 본 병렬판 혹은 직사각형 도파관, 평판 광도파로 외에도, 여러 형태의 광도파로가 있을 수 있습니다. 예를 들면, 광학적 집적 회로 (optical integrated circuit)에서 많이 활용되는 채널형 광도파로 (channel waveguide)가 있을 수 있습니다. 그림 3.16에는 각종 채널형 광도파로에 대한 모식도를 그렸습니다.

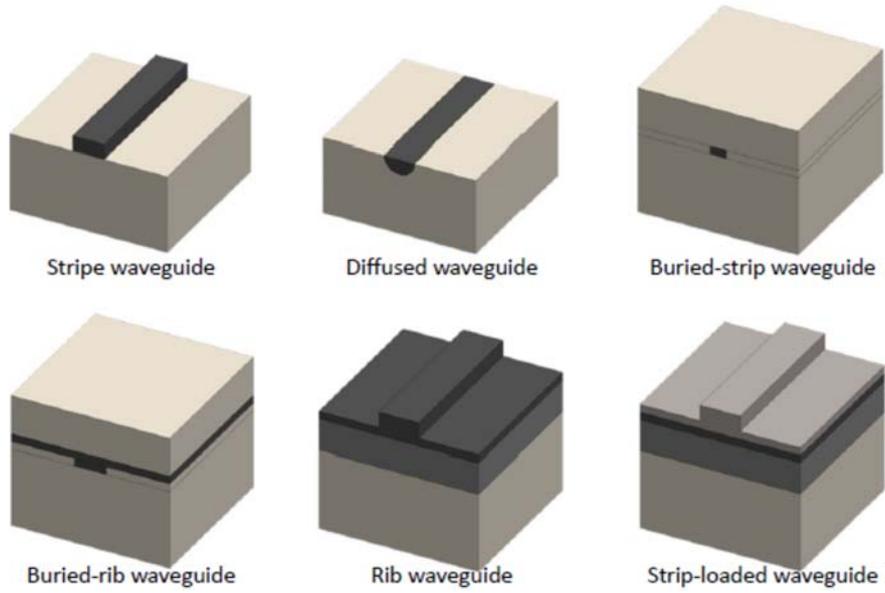


그림 3.16. 여러 가지 형태의 채널형 광도파로

3.3. Guided Mode Resonance (광도파 공명)

위에서 우리는 회절 격자의 원리와 광도파로의 원리에 대한 공부를 했습니다. 만약 이 두 가지 광학 장치를 연결한다면 어떨까요? 회절 격자에서 투과 매질 혹은 반사 매질로 회절되어 진행되는 전자기파가 광도파로로 유도되고, 일부만 계속 유도될 수 있다면, 뭔가 재미있는 일이 벌어질 것 같지 않습니까? 실제로 이 둘을 결합하면 유용한 장치가 나올 수 있습니다. 이 둘이 결합된 개념을 **광도파 공명 (Guided-mode resonance, GMR)**라고 합니다. 이에 대해 잠깐 더 알아 보도록 하겠습니다.

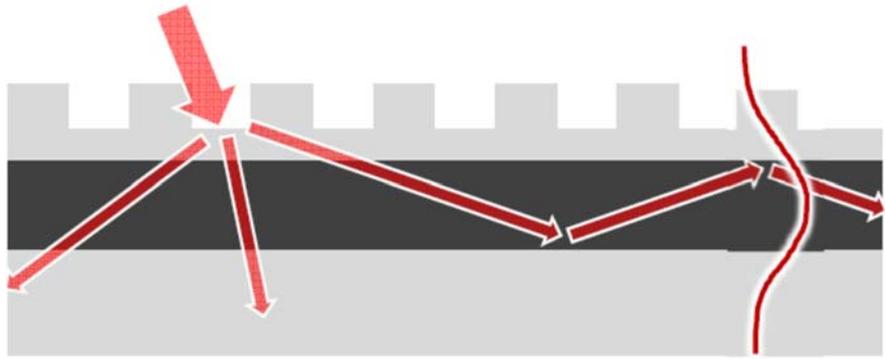


그림 3.17. 평판 광도파로의 위 겹질 매질을 회절 격자로 만든 광도파 공명장치 모식도

일단 그림 3.17을 살펴 봅시다. 그림은 마치 위에서 살펴 본 평판 광도파로와 닮지 않았습니까? 차이점이 있다면, 위 층의 껍질이 회절 격자 형태로 주기적인 모양을 가지고 있다는 점입니다. 즉, 위층은 회절 격자, 중간층은 광도파 매질, 아래층은 보통 평판 광도파로에 활용되는 저 굴절률의 껍질 매질로 이루어진 결합 시스템이라고 볼 수 있겠습니다. 일단 1차원 주기 Λ 와 굴절률 n_2 를 갖는 회절 격자에 대해, 아래의 관계식을 유도했던 것을 기억해 봅시다.

$$n_2 \sin[\theta(m)] = \left| n_1 \sin \theta_{inc} - m \frac{\lambda_0}{\Lambda} \sin \phi \right|, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

또한, 평판 광도파로에서, 굴절률 n_2 를 갖는 속심 매질에 국재된 전자기파의 진행 방향 파수는 아래의 관계식으로 표현되었던 것을 기억해 봅시다.

$$\beta_m = k_0 n_{eff} = k_0 n_2 \sin[\theta(m)]$$

이제 회절 격자와 평판 광도파로가 결합된 시스템에서는, 이 두 관계식이 동시에 만족되어야 하므로, $n_{eff} = \left| n_1 \sin \theta_{inc} - m \frac{\lambda_0}{\Lambda} \sin \phi \right|$ 의 관계식을 유도할 수 있습니다. 평판 광도파로에서 속심의 굴절률은 껍질 (n_1, n_3)의 굴절률보다 커야 하고, 광도파되는 전자기파가 속심에서 진행할 때에 해당하는 유효 굴절률 (n_{eff}) 역시 껍질의 굴절률보다 커야 도파가 성립되었던 것을 생각해 봅시다. 그렇다면, $\max[n_1, n_3] \leq n_{eff} = \left| n_1 \sin \theta_{inc} - m \frac{\lambda_0}{\Lambda} \sin \phi \right| < n_2$ 의 관계식이 만족되어야 한다는 의미입니다. 이 관계식에서, 일단 zero-order 회절 모드 (즉, $m=0$ 인 경우)는 수학적으로 위의 부등식을 만족시킬 수 없기 때문에, 광도파 공명을 유도할 수 없다는 것을 알 수 있습니다. 위의 부등식을 풀어 보면, 다음과 같이, 광도파 공명이 일어날 수 있는 입사 전자기파 파장의 최소값과 최대값을 구할 수 있습니다.

$$\frac{\min(\lambda_0)}{\Lambda} = \begin{cases} \frac{n_1 \sin \theta_{inc} - \max[n_1, n_3]}{m \sin \phi} & \text{for } m < 0 \\ \frac{n_1 \sin \theta_{inc} + \max[n_1, n_3]}{m \sin \phi} & \text{for } m > 0 \end{cases},$$

$$\frac{\max(\lambda_0)}{\Lambda} = \begin{cases} \frac{n_1 \sin \theta_{inc} - n_2}{m \sin \phi} & \text{for } m < 0 \\ \frac{n_1 \sin \theta_{inc} + n_2}{m \sin \phi} & \text{for } m > 0 \end{cases}. \quad (3.36)$$

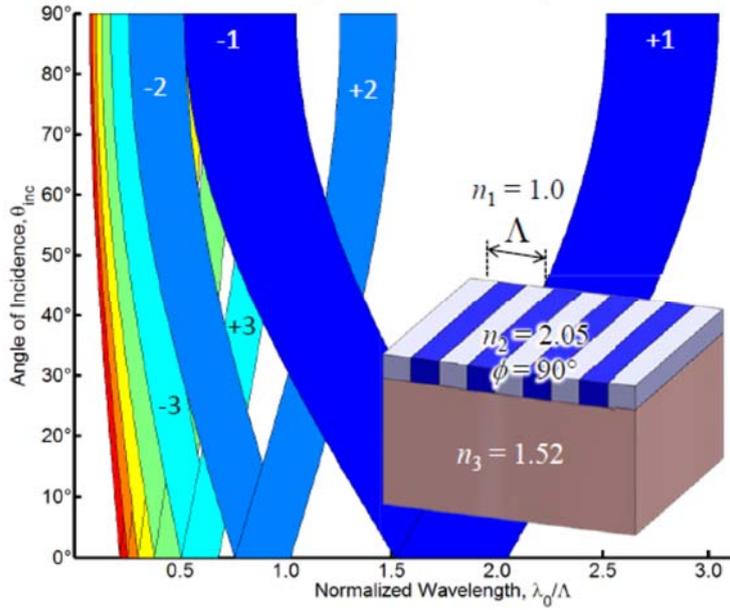


그림 3.18. 회절 격자와 평판 광도파로가 결합된 시스템에서, 회절 모드 (m)에 따라, 광도파 공명이 발생할 수 있는 영역 계산도

그림 3.18에는 $n_1 = 1$, $n_2 = 2.05$, $n_3 = 1.52$, $\phi = 90^\circ$ 일 경우, 광도파 공명이 일어날 수 있는 θ_{inc} 와 λ_0 / Λ 의 조합을 m 값에 따라 표시하였습니다. 그림 3.18에서 볼 수 있듯, m 의 부호에 따라 두 개의 띠가 생기는데, 이 띠의 중간 지점은 $\theta_{inc} = 0$ 일 때, $\frac{med(\lambda_0)}{\Lambda} = \frac{n_2 + \max[n_1, n_3]}{2|m|\sin\phi}$ 와 같이 계산할 수 있습니다.

이러한 광도파 공명 장치는 어떤 특성을 가지고 있을까요? 일단 외부에서 특정한 각도 혹은 특정한 파장으로 입사되는 전자기파가 회절 격자를 거쳐, 투과 매질로 특정한 각도로 회절 될 때, 하필이면 그 각도가 속심에서 광도파될 수 있는 조건이 된다면, 그 조건에서 측정되는 투과도는 최소가 될 것입니다. 즉, 광도파 공명 장치는 특정한 조건의 입사광만 투과시키지 않는 필터로서의 기능을 보일 수 있는 것입니다. 유도된 빛은 어떻게 될까요? 여기서 주의할 점은, 일반적인 회절 격자와는 달리, 광도파 공명 장치에서 활용하는 격자 구조의 격자 개수에는 한계가 있어야 한다는 것입니다. 예를 들어, 회절 격자에서 활용하는 것처럼, 수 백-수 천 개의 격자가 있으면, 광도파가 된 빛이 속심에만 계속 머물러서 밖으로 나오지 못할 것입니다. 그렇다면, 투과도가 최소가 되는 것은 물론, 반사도도 낮아질 것입니다. 이러한 일을 방지하기 위해, 광도파 공명 장치에서 활용하는 회절 격자의 격자 개수에는 한계가 있습니다. 격자 구조가 끝나는 지점에서는 더

이상 광도파 모드가 허용되지 않으므로, 빛이 도파로에서 빠져 나와 측정될 수 있을 것입니다. 이러한 필터를 **광도파 공명 필터 (guided mode resonance filter, GMR filter)**라고도 부릅니다. 예를 들어, TE 모드로 편광된 입사광이 광도파 공명 장치에 입사하였을 경우, 우리는 특정한 파장에 대해서만 반사도를 최대로 만들 수 있는 회절 격자를 최적화 알고리즘을 활용하여 설계할 수 있습니다.⁸ 우리가 타겟으로 하는 입사광이 1.5 GHz의 주파수를 가지고 있다고 가정해 봅시다. 그리고 $n_1 = 1$, $n_3 = 1.53$ 의 조건이 주어졌을 때, 최적화된 회절 격자 구조는 $\Lambda = 15.342 \text{ cm}$, $d = 1.999 \text{ cm}$, $a = 5.588 \text{ cm}$, $f = 0.326$ 값으로 계산됩니다. 이 조건에서, 반사도와 투과도 계산을 한 결과가 그림 4.19에 나타나 있습니다. 예상대로, 1.5 GHz의 전자기파가 최대의 반사도를 보이는 것을 알 수 있습니다.

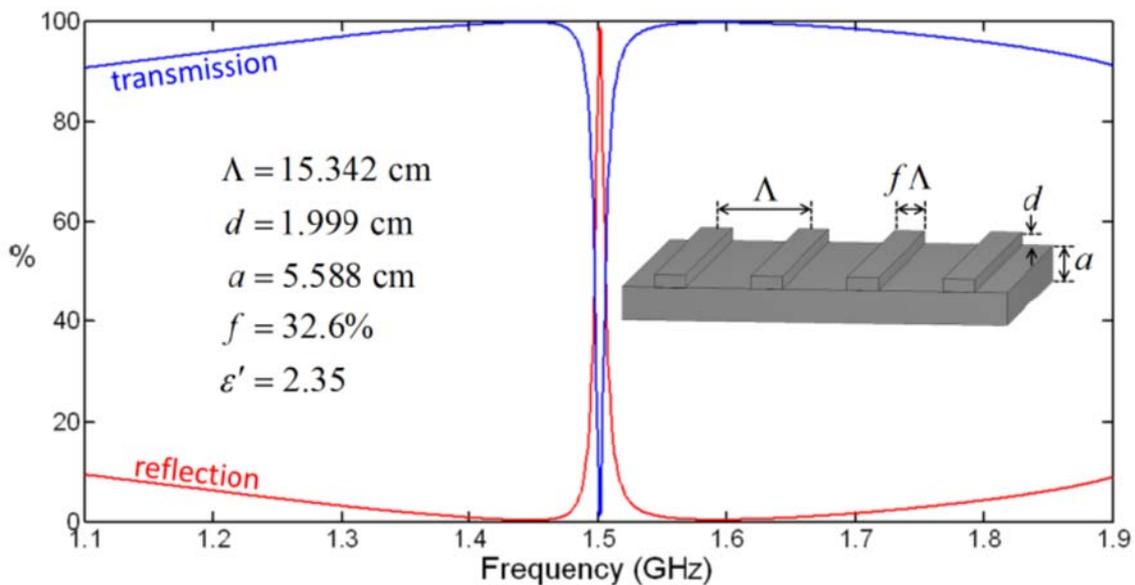


그림 3.19. GMR 구조에서의 반사도 및 투과도 스펙트럼

GMR filter는 굴절률 변화, 각도 변화, 파장 변화 등, 입사 전자기파나 환경 변화 조건에 매우 민감하기 때문에, 기본적으로 바이오 센서 등에 활용될 수 있습니다.

⁸뒤에서 computational part 중, rigorous coupled wave approximation (RCWA) 기법에서 자세하게 배울 것입니다.

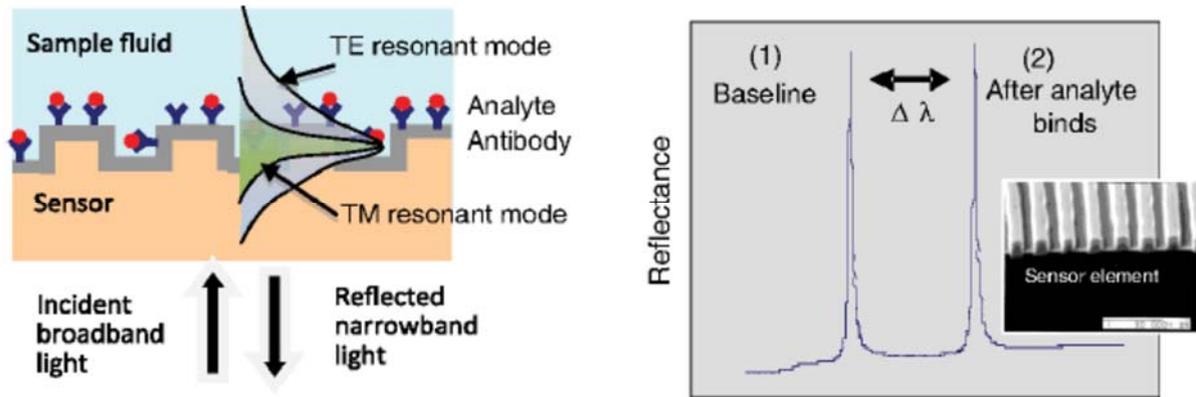


그림 3.20. GMR 필터 기반 바이오 센서 개념도⁹

예를 들어, 그림 3.20에는 회절 격자 표면에 미량의 생체 물질 (예를 들어, 암세포 같은 물질)이 흡착되었을 경우, 흡착된 량에 비례하여 회절 격자의 굴절률이 변함에 따라, GMR를 만족시키는 파장의 변화를 이용하여, 역으로 흡착된 량을 정량적으로 감지할 수 있는 원리에 대한 개념도가 그려져 있습니다. 1차원 회절 격자는 편광에 민감하므로 편광 모드에 따라 GMR 특성이 달라지지만, 2차원 회절 격자의 경우, 회전 대칭성이 있기 때문에, TE 혹은 TM 편광된 입사광에 대해서도 GMR 특성이 변하지 않습니다.

⁹Kaja et al., *Detection of novel biomarkers for ovarian cancer with an optical nanotechnology detection system enabling label-free diagnostics*, J. Biomed. Opt., 17(8) 081412 (2012).