

## 위로부터 응고되는 순 용융액의 열적 불안정성

황인국, 최창균  
서울대학교 공과대학 화학공학과

### Thermal Instability of the Pure Melt Solidified from Above

I. G. Hwang and C. K. Choi  
Department of Chemical Engineering, Seoul National University

#### 서론

응고시의 열전달 현상은 자연계에서 쉽게 찾아볼 수 있는 호수나 강의 결빙, 지표의 냉각으로 인한 마그마의 응고 등으로부터 산업계의 금속재료공정, 에너지 저장 및 결정성장 등에서 중요한 역할을 하고 있다. 이와 관련하여 고체-액체 상 변화시의 열전달 및 대류현상은 실험적, 이론적으로 많은 연구가 이루어졌으며, 용융액의 밀도 차이로 인한 응고시의 자연대류가 응고에 미치는 영향에 대해서도 연구가 활발히 이루어지고 있다[1].

본 연구에서는 선형 안정성 이론과 전파이론(propagation theory)을 적용하여 위로부터 냉각되는 응고 계의 대류 불안정성을 조사하였다. 본 연구의 관심은 Stefan 문제유형의 응고 계에서 결정 층이 시간에 따라 성장하고 용융액에서의 온도분포가 시간에 따라 변하게 될 때, 밀도 차로 인한 대류발생에 대한 것이다. 수치해법을 이용하여 대류가 발생할 때의 임계시점과 임계 Rayleigh 수 및 응고율의 영향을 조사하였다. 또한 응고에 대한 기초적인 실험으로서 수직방향으로 냉각되는 응고실험을 수행하였다. 상변화 물질로서 물성이 알려져 있는 파라핀을 이용하여 응고시의 계면위치와 자연대류의 효과를 조사하였다.

#### 이론적 해석

순 물질의 용융액을 위로부터 냉각하여 응고시킬 때, 고체상과 액체상에서의 온도분포는 다음과 같이 구해진다[2].

$$T_S = T_A + \frac{(T_H - T_A)\text{erf}(\eta/\sqrt{x})}{\text{erf}(\lambda/\sqrt{x})} \quad (\eta < \lambda)$$

$$T_L = T_0 + \frac{(T_H - T_0)\text{erfc}(\eta)}{\text{erfc}(\lambda)} \quad (\eta > \lambda)$$

여기서 하첨자 S와 L은 각각 고체상과 액체상을 나타내며,  $x$ 는 고체상과 액체상의 열확산 계수의 비로서  $x_S/x_L$ 이다.  $T_0$ 는 초기온도,  $T_A$ 는 냉각면의 온도,  $T_H$ 는 응고계면의 온도,  $\eta$ 는 유사변수,  $\lambda$ 는 상수로서 응고율을 나타낸다. 고체상과 액체상에서의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T_S}{\partial t} = x_S \nabla^2 T_S$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla\right) T_L = \alpha_L \nabla^2 T_L$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla\right) \vec{U} = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{U}$$

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0$$

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0))$$

여기서 액체는 비압축성 뉴턴 유체이며  $U, P, \rho, \mu, \vec{g}$  는 각각 액체의 속도, 압력, 밀도, 점도, 중력 가속도이다.  $\alpha$  는 열팽창 계수이다. 위의 지배방정식을 다음과 같은 무차원변수를 도입하여 무차원화시킨다.

$$z = \frac{1}{L_s} Z$$

$$w = \frac{L_s}{x_L} W$$

$$\tau = \frac{x_L}{L_s^2} t$$

$$\theta = \frac{g \alpha L_s^3}{x_L \nu} T$$

$$p = \frac{L_s^2}{\mu x_L} P$$

여기서  $L_s$  는 임의의 길이척도이며  $\nu$  는 동점도이다. 지배방정식을 무차원화하고 선형 안정성 이론과 전파이론을 도입하여 얻은 교란량의 진폭함수들에 대한 섭동 방정식은 다음과 같다.

$$(D^2 + \frac{2}{x} \eta D - a^{*2}) \theta_s^* = 0$$

$$(D^2 + 2\eta D - a^{*2}) \theta_L^* = R^* w^* D \bar{\theta}_L$$

$$\left[ (D^2 - a^{*2})^2 + \frac{2}{Pr} (\eta D^3 - a^{*2} \eta D + 2 a^{*2}) \right] w^* = -a^{*2} \theta_L^*$$

여기서  $D = \frac{d}{d\eta}$ ,  $a^* = a\delta$ ,  $R^* = R\delta^3$  이다.  $R$  은 Rayleigh 수로서  $R = \frac{g\alpha(T_0 - T_A)L_s^3}{x_L \nu}$  이고,  $a$  는 무차원 파수이고,  $Pr$  는 Prandtl 수로서

$Pr = \frac{\nu}{x_L}$  이다.  $\delta$  는 새로 정의된 무차원 깊이로서  $2\tau^{1/2}$  이며,  $\bar{\theta}_L$  은 무차원 기본온도분포이다. 위의 섭동 방정식에 적용될 경계조건식은 다음과 같다.

$$(\eta = 0)$$

$$\theta_s^* = 0$$

$$(\eta = \lambda)$$

$$\theta_s^* = \theta_L^* \quad , \quad kD\theta_s^* = D\theta_L^* \quad , \quad w^* = Dw^* = 0$$

$$(\eta \rightarrow \infty)$$

$$w^* = D^2w^* = \theta_L^* = 0$$

### 수치해법 및 결과검토

자연대류의 임계시점을 구하기 위해서 교란 방정식과 경계조건을 만족하는 고유치  $R^*$ ,  $a^*$ 를 구하여 그 최소값을 찾아야 한다. 본 연구에서는 수치해법으로 Runge-Kutta 4차의 방법을 사용하였다. 우선 고체상에서의 교란식은 다른 식들과 결부되어 있지 않으므로  $\eta = 0$ 에서  $D\theta_s^*$ 를 가정하여 초기치 문제로 해를 구할 수 있다.  $\eta = \lambda$ 까지 적분하여 얻은  $\theta_s^*$ ,  $D\theta_s^*$ 값은 다시 경계조건에 의해  $\theta_L^*$ ,  $D\theta_L^*$ 의 값으로 지정되게 된다. Pr,  $a^*$ 주요 고유치의 크기를 고정하기 위해서 임의로  $D^2w^* = 1$ 로 놓고, R,  $D^3w^*$ 를 가정한 후  $\eta = \lambda$ 에서  $\eta = \infty$ 까지 액상에서의 교란식을 적분하게 된다.  $\eta = \infty$ 에서의 조건은  $\eta$ 값을 10에서 15 정도의 값으로 놓고, 경계 조건을 만족시킬 때까지 Newton-Raphson 방법으로 초기치를 다시 가정하여 계산한다.

지배 방정식과 경계조건에 나오는 주요 매개변수는 Pr,  $x$ ,  $k$ ,  $\lambda$ 이다. 우선  $\lambda$ 의 효과를 조사하기 위하여 Fig. 1에 대표적인 중립안정성 곡선을 나타내었다. 이 중립 안정성 곡선은 주어진 파수  $a^*$ 에 대하여 고유치로 구해진 Rayleigh 수이다. 곡선의 위쪽은 계가 불안정한 상태이며, 아래쪽은 안정한 상태이다. 임계 Rayleigh 수  $R_c^*$ 는 주어진 파수  $a^*$ 에 대해 구해진 최소의 Rayleigh 수가 된다.  $\lambda$ 값을 0, 0.5, 1로 증가시켰을 때, 임계 Rayleigh 수가 증가함을 알 수 있다.  $\lambda = 0$ 일 때에는 응고가 진행되지 않을 때이며, 임계값으로  $R_c^* = 167.79$ ,  $a_c^* = 1.08$ 의 결과를 얻었다. Fig. 2와 Fig. 3에는  $R_c^*$ 값과  $a_c^*$ 값에 주는  $\lambda$ 의 영향을 그림으로 나타내었다.

다음으로 Pr 수의 영향을 알아보기 위해  $x = 1$ ,  $k = 1$ ,  $\lambda = 1$ 로 놓고, 여러 Pr 수에 대해서 구해진 임계값을 Fig. 4에 도시하였다. Pr 수가 커질수록 임계값은 더 작아짐을 알 수 있으며, Pr 수가 100이상이면 임계 Rayleigh 수의 변화가 거의 없음을 알 수 있다. 또한 Stefan 수가 증가하면 계는 더 불안정해짐을 알 수 있었으며, 기초응고실험으로 응고율의 변화 및 자연대류의 효과를 정성적으로 관측하였다.

### 참고문헌

1. Chen, F., Yang, T. L. and Lu, J. W.: *J. Appl. Phys.*, **74**, 7531(1993).
2. Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C.: *Conduction of Heat in Solids*, 2nd., Oxford University Press(1959).

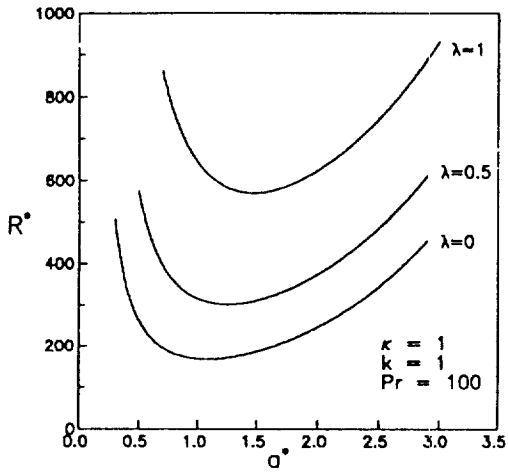


Fig. 1. Neutral stability curves for various  $\lambda$ .

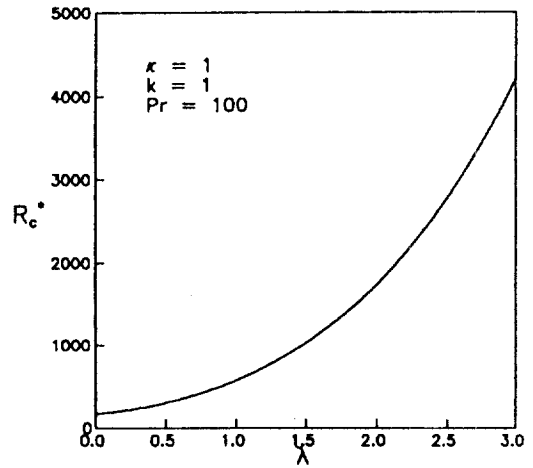


Fig. 2. Critical Rayleigh number vs.  $\lambda$  for  $Pr = 100$ .

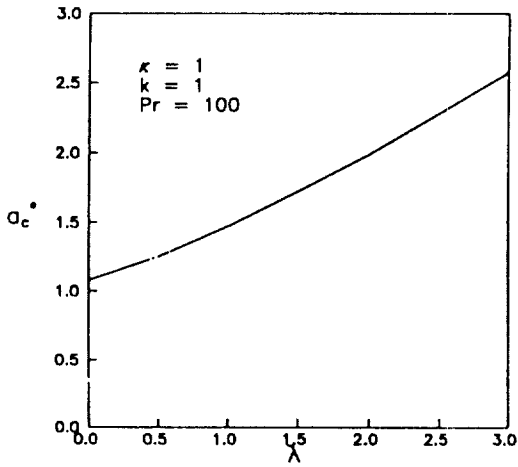


Fig. 3. Critical wave number vs.  $\lambda$  for  $Pr = 100$ .

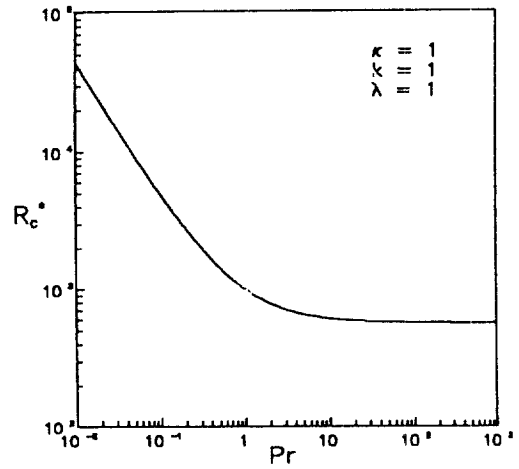


Fig. 4. Effect of Prandtl number for  $\lambda = 1$ .