초기 안정하게 성층화되어 있는 유체층에서 시간에 따른 열교란의 성장

박희관, 정태준, 최창균, 김민찬*
서울대학교 공과대학 응용화학부
제주대학교 공과대학 화학공학과*

Temporal Evolution of Thermal Disturbances in an Initially, Stably Stratified Fluid

H.K. Park, T.J. Chung, C.K. Choi, M.C. Kim*
School of Chemical Engineering, Seoul National University
Department of Chemical Engineering, Cheju National University*

서론

자연대류는 중력장 하에서 부력이나 표면장력의 변화에 의해 발생되는 물리적 현상이다. 부력에 의한 자연대류는 열 또는 물질전달이 일어나는 각종 화공장치의 설계에서 자주 볼 수 있으며, 자연대류에 의한 유동은 실제 공정에서 열 및 물질전달 특성에 영향을 미치므로 이에 대한 연구가 진행되어 왔다. 이러한 자연대류에 관한 연구는 열 및 물질전달의 제어 및 제품의 균질화, 또는 순수화를 요구하는 결정성장, 전자소재의 가공 등의 영역에서 중요한 기여를 하고 있다. Choi 등[1, 2]은 열침투깊이를 새로운 길이 차원으로 하고 교란의 시간 의존성을 고려하는 전파이론을 통하여 안정성 해석을 하여 자연대류 발생 시점의 예측에 대한 연구를 하였다.

본 연구에서는 전파이론의 타당성을 입증하기 위해 고정 경계면으로 이루어진 초기 안정하게 성층화된 수평 유체층의 밑면을 급격하게 등온 가열하는 계에 대하여 수치 해석적으로 시간에 따른 교란의 성장을 연구하였다.

이론

본 연구에서는 Fig. 1과 같은 유체층의 깊이가 d인 두 개의 고정 경계면 사이에 초기 정지 상태에 있는 유체층을 기본계로 설정하여 밑면이 갑자기 등온가열되는 계에 대하여 고찰하였다. 이러한 경우 초기 유체층의 선형 온도분포는 비선형적으로 변하게 되며, 온도차 $(T_b - T_u)$에 의해 발생하는 부력에 의해 대류가 일어날 것이다. 이때 유체층은 뉴튼유체이며, 밀도가 온도에 대해 선형으로 변하고, 외력에 의한 밀도 변화를 제외하고는 밀도가 일정하다는 Boussinesq가정을 도입하면 계는 다음과 같은 Navier-Stokes 식, 에너지 방정식, 상태 방정식에의하여 지배된다.

$$\rho_i[\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{U}\cdot\nabla]\ \boldsymbol{U} = -\nabla P + \mu\nabla^2\boldsymbol{U} + \rho\vec{g} \tag{1}$$

$$[\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{U}\cdot\nabla]T = \alpha\nabla^2 T \tag{2}$$

$$\rho = \rho_i[1-\beta(T-T_i)] \tag{3}$$

여기서 $\boldsymbol{U}$, P, ρ_i, μ, T, T_i, g, β, ν, α는 각각 속도 벡터, 압력, 유체층의 초기 밀도,

점도, 유체층의 온도, 유체층의 초기 밑면온도, 중력 가속도, 부피 팽창계수, 동점도, 열확산계수이다.

계를 좀더 간단하게 하기 위해 y, z의 2차원 유동으로 가정하고, d^2/α, d, 그리고 $\mu\alpha/d^2$를 시간과 길이, 압력의 척도로 사용하여 무차원화하면, 다음과 같은 2차원의 연속식, 운동방정식, 에너지방정식이 얻어진다.

$$\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+Pr\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+Pr\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+PrRa\theta \tag{6}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}+w\frac{\partial \theta}{\partial z}=\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) \tag{7}$$

이 때 중요한 무차원군은 Rayleigh수, Ra와 Prandtl수 Pr, 그리고 온도 θ, 온도기울기 γ로 다음과 같이 주어진다.

$$\mathrm{Ra}=\frac{g\beta\Delta T d^3}{\alpha\nu},\quad \mathrm{Pr}=\frac{\nu}{\alpha},\quad \theta=\frac{T-T_i}{T_b-T_i},\quad \gamma=\frac{T_u-T_i}{T_b-T_i} \tag{8}$$

전파이론은 선형이론을 바탕으로 일반적인 계의 전체길이보다는 실제로 변화가 발생하는 열침투깊이($\delta_T \propto \tau^{1/2}$)를 이용하여, 시간과 길이를 하나의 유사변수로 하였다. 이로부터 안정성 방정식을 구성하며, 이 방정식으로부터 쉽게 교란의 거동을 예측할 수 있다. Foster[3]에 의하면 대류가 명백히 관찰되는 시점을 τ_m이라 했을 때 안정성 방정식을 통하여 예측한 시간 τ_c와는 $\tau_m \approx 4\tau_c$ 의 관계가 있다. 이는 τ_c에서 발생된 불안정한 초기교란이 가시화되기까지는 시간이 걸리기 때문이다. Figure 2는 Inoue 등[4]과 Patrick과 Wragg[5]의 실험결과와 전파이론에서 구한 임계시간을 도시한 그래프이다. 실험은 Schmidt수가 2000보다 큰 전기화학계에서 이루어졌으며, 시간에 따라 개별물질전달계수를 측정하였다. 이 실험의 결과로부터 구한 대류발생시점과 전파이론에 의해 구한 τ_c를 비교해보면 임계시간을 4배 확장한 $4\tau_c$와 실험결과가 거의 일치한다.

본 연구에서는 '$\tau_m \approx 4\tau_c$'의 관계를 설명하기 위하여 Fig. 1의 계에 대하여 Patankar[6]에 의해 개발된 유한부피법을 이용하여 대류발생 임계시점과 교란의 성장과의 관계를 설명하였다. 시간간격 $\Delta\tau = 10^{-7}$으로, 수직방향의 거리간격을 $\Delta z = 1/200$로 차분화를 하였으며, 각 제어체적에서 계산과정 중 발생하는 오차가 균등하도록 등방배열을 채용하였다. 그리고 배열은 엇갈림 격자를 사용하여 속도와 온도, 압력을 엇갈리게하였다. 압력성분을 계산하기 위하여 연속방정식과 운동방정식을 결합하는 SIMPLE 해법을 이용하였고, 대류항에 의한 오차를 줄이기 위하여 하이브리드 도식을 채용하였다. 그리고 초기값은 아래에 보인, 전파이론으로 임계시점 τ_c에서 얻은 온도교란 값을 사용하였다.

$$\theta\,(y,z) \;=\; \theta_*\;\theta^*(\tau_c,z)\;\cos(a_c y) \tag{9}$$

여기서 $\theta^*(\tau_c,z)$는 전파이론에서 얻은 온도교란분포이며, θ_*는 온도교란의 초기크기이다. 본 수치해석에서는 $Pr = \infty$, 속도교란의 초기크기 $w^* = 0$으로 하였고, 물리량들의 수렴조건은 다음과 같다.

$$\max\left|\frac{\phi_{new}-\phi_{old}}{\phi_{new}}\right|\le 10^{-6} \tag{12}$$

결과 및 토론

본 연구에서는 평균장 근사법의 개념을 이용하여 수평평균온도와 이에 대한 온도교란량의 합인, $\theta=\langle\theta\rangle+\theta'$로 나타내었다. 이에 따라 평균온도의 시간에 따른 성장률과 교란량의 성장률을 다음과 같이 정의하였다.

$$r_0=\frac{1}{\langle\theta\rangle_{rms}}\frac{d\langle\theta\rangle_{rms}}{d\tau}\quad,\quad r_1=\frac{1}{\theta'_{rms}}\frac{d\theta'_{rms}}{d\tau} \tag{13}$$

$$\langle\theta\rangle_{rms}=\frac{[\int_A\langle\theta\rangle^2 dA]^{1/2}}{A}\quad,\quad \theta'_{rms}=\frac{[\int_A\theta'^2 dA]^{1/2}}{A} \tag{15.1-2}$$

여기서 A는 수평면의 면적이다. 대류가 발생하기 전에는 전도에 의한 영향이 크므로 r_0이 r_1보다 크지만, 대류가 일어나 유동이 발생할 경우 교란량의 성장률이 더 커야한다. 따라서 일반적으로 r_1이 r_0보다 커지게 된다. Figure 3은 평균온도 성장률과 교란량의 성장률을 도시한 그림으로 온도기울기 $\gamma=0.6$, 그리고 Ra가 5×10^5인 경우와 10^5인 경우에 대한 결과이다. 그림에서 보이듯이 r_0와 r_1 이 교차되는 지점의 시간은 전파이론에서 구한 τ_c보다 약간 작은 값으로, 전파이론은 교란성장률의 우세에 인한 불안정성이 발생한 시점을 예측한다고 말할 수 있다. Figure 4는 이 두 경우에 대하여 Nusselt수 Nu를 도시한 그래프이다. Nu는 다음과 같이 정의된다.

$$Nu = -\frac{d\langle\theta\rangle}{dz}\bigg|_{z=0} \tag{16}$$

그래프에서 알 수 있듯이 $4\tau_c$ 근처에서 교란이 일어나기 시작하며, 이는 Fig. 2의 실험결과와 일치한다. 바로 이 시간이 Foster[3]가 언급한 명백히 대류가 일어나는 시간인 τ_m이 되는것으로, τ_c와 τ_m의 시간차는 발생 교란이 경계층두께를 벗어나게 되는 잠재적인 시간으로 볼 수 있다. 또한 $r_0\simeq r_1$인 시간을 τ_c가 근사적으로 나타내고 있음을 알 수 있다.

참고문헌

1. Kim, M.C., Choi, K.H. and Choi, C.K.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **42**, 4253-4258 (1999).
2. Yang, D.J. and Choi, C.K.: *Phys. Fluids*, **14**, 930 (2002).
3. Foster, T.D.: *Phys. Fluids*, **12**, 2482-2487 (1969).
4. Patrick, M.A. and Wragg, A.A.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **18**, 1397-1405 (1975).
5. Inoue, Y., Akutagawa, S., Saeki, S. and Ito, R.: *Kagakugogaku Ronbunshu*, **9**, 359-369 (1983).
6. Patankar, S.V.: "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Taylor and Francis", New York (1980).

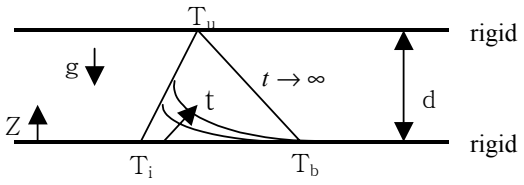

Figure 1. Temperature profiles in conduction state.

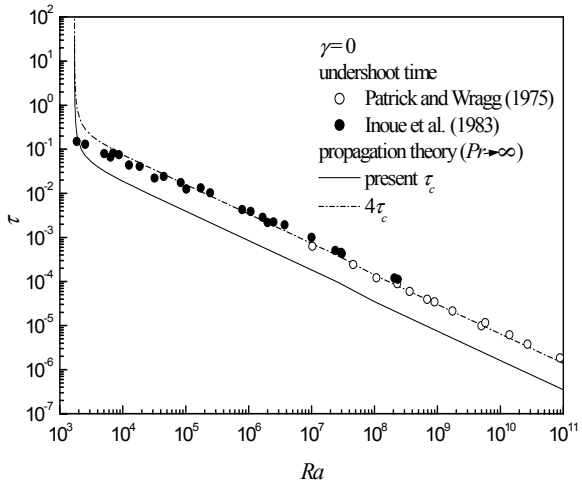

Figure 2. Comparison of predictions with experimental data of electroplating system corresponding to large Pr

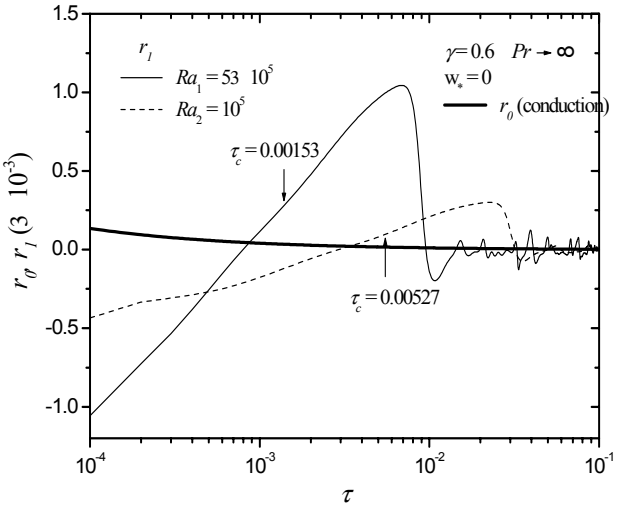

Figure 3. Temporal growth rates of mean-temperature and its perturbed values.

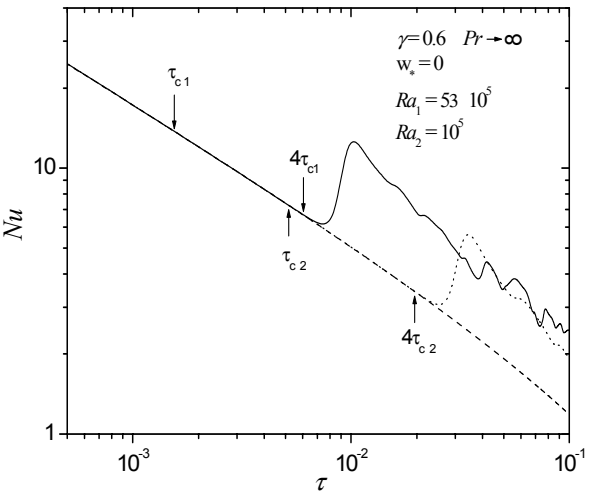

Figure 4. Time-dependent Nusselt number.