# Chap 5. 발열 고체 내의 정상상태 열전도

## 5.1 해석해

● 에너지 발생과 일정한 표면 온도를 갖는 평판

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{d^2T}{dx^2} + g$$

0(steady state)

B.C.'s

x=0에서 $T = T_1$

x=L에서 $T = T_2$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{g}{k}x + C_1$$

$$T = -\frac{g}{k}\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

경계조건을 대입 후 정리하면

$$T = \frac{gL^2}{2k}\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right] + (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1$$

(a) 에너지 발생이 없는 경우

g=0

Chap. 4에서 보아온 바와 같이

$$T = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1$$

가 된다.

(b) $T_1 = T_2 = T_w$ 인 경우

$$T = \frac{gL^2}{2k}\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right] + T_w$$

이 경우는 x=L/2에서 대칭 조건을 적용하여도 된다. 즉, 경계조건을 다음

과 같이 변경하여 해석할 수도 있다.

B.C.'s

x=0에서 $T = T_w$ 또는 x=L에서 $T = T_w$

x=L/2에서 $\frac{dT}{dx} = 0$

그림 5.1(c)와 같은 좌표계를 사용한다면 x축으로 –L/2 만큼 평행 이동하여 다음과 같은 경계조건을 사용한다.

B.C.'s

x=-L/2에서 $T = T_w$ 또는 x=L/2에서 $T = T_w$

x=0에서 $\frac{dT}{dx} = 0$

● 평판으로부터의 열전달

그림 5-1(c)와 같은 경우에 평판의 오른쪽 경계면을 통하여 빠져나가는 열속은

$$q = -k\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L/2} = \frac{gL}{2}$$

즉 평판 내에서 생성되는 열량$(Q = gAL)$의 반인 $gAL/2$가 빠져 나간다.

● 에너지 발생과 대류가 일어나는 평판 벽

그림 5.2와 같이 x=0에서 단열 x=L에서 대류가 일어나는 경우

지배 방정식

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{g}{k} = 0$$

경계조건

x=0에서 $\frac{dT}{dx} = 0$

x=L에서 $-k\frac{dT}{dx} = h_\infty(T - T_\infty)$

위의 식을 풀면

$$T = \frac{gL^2}{2k}\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right] + \frac{gL}{h_\infty} + T_\infty$$

$h_\infty \to \infty$인 경우는 x=L에서의 온도 $T_L$과 $T_\infty$가 같은 경우와 같다. 즉 두번째 경계조건이
x=L에서 $T = T_\infty$ 으로 변하게 되고, 온도 분포는 다음과 같이 된다.

$$T = \frac{gL^2}{2k}\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right] + T_\infty$$

$h_\infty \to 0$인 경우는 x=L에서 단열인 경우이다. 이 경우에 온도 분포는 $T = \infty$ 이다. 즉 열은 계속하여 발생하는데 양쪽 면이 단열 이므로 평판의 온도는 계속 증가하여 정상상태$(t = \infty)$에서는 $T = \infty$가 된다.

(예제 5-1)

● 에너지 발생과 일정한 표면 온도를 갖는 고체 원통
지배 방정식

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{g}{k} = 0$$

경계조건

r=0에서 $\frac{dT}{dr} = 0$ : 이 조건은 열적 대칭성을 의미한다.

r=b에서 $T = T_w$

첫번째 경계조건은 다음과 같이 변환될 수도 있다. 모든 물리량은 유한해야 하므로
r=0에서 $T \to \text{finite}$
이 된다. 이 두 조건은 서로 동일한 온도 분포를 준다.

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{g}{k}r$$

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{g}{k}\frac{r^2}{2} + C_1$$

$\frac{dT}{dr} = -\frac{g}{k}\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$ : 이 단계에서 $\frac{dT}{dr} = 0$ 조건을 적용하면, $C_1 = 0$.

$T = -\frac{g}{k}\frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2$: 이 단계에서 $T \to \text{finite}$ 조건을 적용하여도 $C_1 = 0$.

따라서

$$T = -\frac{g}{k}\frac{r^2}{4} + C_2$$

r=b에서 $T = T_w$ 조건을 적용하여 정리하면

$$T = \frac{g}{k}\frac{b^2}{4}\left[1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2\right] + T_w$$

<u>물체 내의 임의의 점에서의 열속</u>

$$q = -k\frac{dT}{dr} = \frac{qr}{2}$$

<u>물체 내의 임의의 점에서의 열전달 속도</u>

$Q(r) = q(r)A(r) = \frac{qr}{2} \times 2\pi rL = g\pi r^2 L$ : r=r이내에서 발생한 모든 열은 r=r을 통하여 빠져 나간다.

<u>중심온도</u>

$$T_{CL} = \frac{g}{k}\frac{b^2}{4} + T_w$$

● 에너지 발생과 대류가 있는 고체 원통

지배 방정식

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{g}{k} = 0$$

경계조건

r=0에서 $\frac{dT}{dr} = 0$ 또는 $T \to \text{finite}$

r=b에서 $-k\frac{dT}{dr} = h_\infty (T - T_\infty)$

위 식을 풀면

$$T = \frac{gb^2}{4k}\left[1-\left(\frac{r}{b}\right)^2\right] + \frac{gb}{h_\infty} + T_\infty$$

$h_\infty \to \infty$, $h_\infty = 0$의 극한의 경우에 대한 물리적 의미는 평판의 경우와 같다.

(예제 5-2)

(예제 5-3)

$g = g_0\left[1-\left(\frac{r}{b}\right)^2\right]$인 경우

지배 방정식

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{g_0}{k}\left[1-\left(\frac{r}{b}\right)^2\right] = 0$$

경계조건

r=0에서 $\frac{dT}{dr} = 0$

r=b에서 $T = T_w$

풀이 과정은 교과서에 자세히 설명되어 있슴.

(예제 5-4)

지배 방정식

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{g}{k} = 0$$

경계조건

r=a에서 $T = 0$

r=b에서 $T = 0$

풀이 과정은 교과서에 자세히 설명되어 있슴.

● 에너지 발생과 대류가 있는 고체 구

지배 방정식

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)+\frac{g}{k}=0$$

경계조건

r=0에서 $\frac{dT}{dr}=0$ 또는 $T\to \text{finite}$

r=b에서 $-k\frac{dT}{dr}=h_\infty\left(T-T_\infty\right)$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=-\frac{g}{k}r^2$$

$$r^2\frac{dT}{dr}=-\frac{g}{k}\frac{r^3}{3}+C_1$$

$\frac{dT}{dr}=-\frac{g}{k}\frac{r}{3}+\frac{C_1}{r^2}$ : 이 단계에서 $\frac{dT}{dr}=0$ 조건을 적용하면, $C_1=0$.

$T=-\frac{g}{k}\frac{r^2}{6}-\frac{C_1}{r}+C_2$: 이 단계에서 $T\to \text{finite}$ 조건을 적용하여도 $C_1=0$.

따라서

$$T=-\frac{g}{k}\frac{r^2}{6}+C_2$$

r=b에서의 조건을 대입하여 정리하면

$$T=\frac{g}{k}\frac{b^2}{6}\left[1-\left(\frac{r}{b}\right)^2\right]+\frac{gb}{3h_\infty}+T_\infty$$

$h_\infty\to\infty$, $h_\infty=0$의 극한의 경우에 대한 물리적 의미는 평판의 경우와 같다.

중심에서의 온도

$$T_{CL}=\frac{g}{k}\frac{b^2}{6}+\frac{gb}{3h_\infty}+T_\infty$$

(예제 5-5)