Chap 5,6 보충 – 수치해석

<u>정상 상태 문제</u>

1. 유한 차분법

유한 차분 기초

다음과 같은 Taylor 급수를 고려하자.

$$f(x+\Delta x)=f(x)+(\Delta x)f'(x)+\frac{(\Delta x)^2}{2!}f''(x)+\frac{(\Delta x)^3}{3!}f'''(x)+\cdots \quad (1)$$

$$f(x-\Delta x)=f(x)-(\Delta x)f'(x)+\frac{(\Delta x)^2}{2!}f''(x)-\frac{(\Delta x)^3}{3!}f'''(x)+\cdots \quad (2)$$

(1) 식을 2차 이상의 항을 무시하고 정리하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$f'(x)\approx\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$: 1계 미분에 대한 전방 차분 근사식

(2) 식을 2차 이상의 항을 무시하고 정리하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$f'(x)\approx\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$: 1계 미분에 대한 후방 차분 근사식

(1)식과 (2)식을 빼면 $(\Delta x)^2$ 항이 소거되고, 3차 이상의 항을 무시하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$f'(x)\approx\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$: 1계 미분에 대한 중앙 차분 근사식

2계 이상의 고계 도함수에 대해서도 위와 같은 관계를 사용하여 차분 근사식을 얻을 수 있다. 예를 들어 (1)식과 (2)식을 더하고 4차 이상의 항을 무시하면

$$f''(x)\approx\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$: 2계 미분에 대한 중앙 차분 근사식

지배 방정식

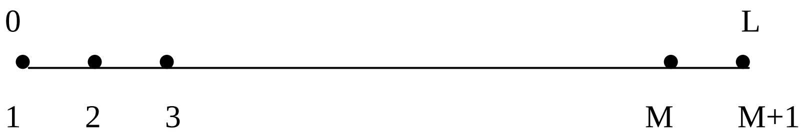
$$k\frac{d^2T}{dx^2}+g(x)=0$$

경계조건

$x = 0$ 에서 $T = T_0$

$x = L$ 에서 $T = T_L$

을 차분 근사법을 적용하여 풀어보자



1번 점의 온도는 경계조건에서 $T_1 = T_0$, M+1번 점에서의 온도는 $T_{M+1} = T_L$ 로 고정되어 있다.

지배방정식을 정리하여 차분 2계미분에 대한 중앙 차분을 사용하여 정리하면

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta x)^2} = -\frac{g(x_i)}{k}$$

i=2인 경우

$$T_3 - 2T_2 = -\frac{g(x_2)}{k}(\Delta x)^2 - T_1(= T_0)$$

i=M인 경우

$$-2T_M + T_{M-1} = -\frac{g(x_M)}{k}(\Delta x)^2 - T_{M+1}(= T_L)$$

i=3,4 … M-1인 경우

$$T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} = -\frac{g(x_i)}{k}(\Delta x)^2$$

위의 관계를 행렬식으로 나타내면

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ \vdots \\ T_{M-2} \\ T_{M-1} \\ T_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g(x_2)(\Delta x)^2/k - T_0 \\ -g(x_3)(\Delta x)^2/k \\ -g(x_4)(\Delta x)^2/k \\ \vdots \\ -g(x_{M-2})(\Delta x)^2/k \\ -g(x_{M-1})(\Delta x)^2/k \\ -g(x_M)(\Delta x)^2/k - T_{M+1} \end{pmatrix}$$

가 되고 위의 행렬은 삼대각 행렬이므로 삼대각 행렬에 대한 연립 방정식 풀이법을 쓰면 쉽게 온도를 구할 수 있다.

다른 경계조건에 대한 고찰

(i) 열속이 고정된 경우

$x=0$ 에서 $-k\frac{dT}{dx}=q_0$ 인 경우

지배 방정식을 x=0에서 $x=\frac{\Delta x}{2}$ 까지 적분하여 보자

$$\int_0^{\frac{\Delta x}{2}} k\frac{d^2T}{dx^2}+g(x)dx=0$$

$$\int_0^{\frac{\Delta x}{2}} g(x)dx=-k\left.\frac{dT}{dx}\right|_0^{\frac{\Delta x}{2}}=-k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{\frac{\Delta x}{2}}-q_0$$

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{\frac{\Delta x}{2}}\approx\frac{T_2-T_1}{\Delta x}$$: 1계 미분에 대한 중앙차분 근사로 근사할 수 있으므로

$$\int_0^{\frac{\Delta x}{2}} g(x)dx=-k\frac{T_2-T_1}{\Delta x}-q_0$$

$\int_0^{\frac{\Delta x}{2}} g(x)dx\approx g_1\frac{\Delta x}{2}$ 라 근사하면

$g_1\frac{\Delta x}{2}=-k\frac{T_2-T_1}{\Delta x}-q_0$ 을 얻을 수 있다.

(ii) 대류-전도 경계조건

$x = L$ 에서 $-k\frac{dT}{dx} = h(T - T_\infty)$ 인 경우

지배 방정식을 $x = L - \frac{\Delta x}{2}$ 에서 x=L 까지 적분하여 보자

$$\int_{L-\frac{\Delta x}{2}}^{L} k\frac{d^2T}{dx^2} + g(x)dx = 0$$

$$\int_{L-\frac{\Delta x}{2}}^{L} g(x)dx = -k\frac{dT}{dx}\bigg|_{L-\frac{\Delta x}{2}}^{L} = -k\frac{dT}{dx}\bigg|_{L} + k\frac{dT}{dx}\bigg|_{L-\frac{\Delta x}{2}}$$

경계조건에서 $-k\frac{dT}{dx}\bigg|_{L} = h\left(T|_L - T_\infty\right)$ 이고

$\frac{dT}{dx}\bigg|_{L-\frac{\Delta x}{2}} \approx \frac{T_{M+1} - T_M}{\Delta x}$: 1계 미분에 대한 중앙차분 근사로 근사할 수 있으므로

$$\int_{L-\frac{\Delta x}{2}}^{L} g(x)dx = h(T_{M+1} - T_\infty) + k\frac{T_{M+1} - T_M}{\Delta x}$$

$\int_{L-\frac{\Delta x}{2}}^{L} g(x)dx \approx g_{M+1}\frac{\Delta x}{2}$ 라 근사하면

$g_{M+1}\frac{\Delta x}{2} = h(T_{M+1} - T_\infty) + k\frac{T_{M+1} - T_M}{\Delta x}$ 을 얻을 수 있다.

이러한 경우는 앞에서 다룬 양쪽 경계에서 온도가 고정된 경우와는 달리 T_1 과 T_{M+1} 이 미지수이고 이에 대한 식이 두개 주어져 있으므로 풀릴 수 있는 문제가 된다.

2. 사격법

초기치 문제에 대한 해법은 알려져 있다고 가정하자. 즉 경계치 문제를 초기치 문제로 바꿔기만 하면 이 문제에 대한 해는 알고 있다고 가정한다. 만약 위에서 다룬 바와 같이 양쪽 경계에서 온도가 고정되어 있다고 가정하자.

지배 방정식

$$k\frac{d^2T}{dx^2}+g(x)=0$$

경계조건

$x=0$ 에서 $T=T_0$

$x=L$ 에서 $T=T_L$

만약 x=0에서 $\frac{dT}{dx}$가 알려져 있으면 이 문제는 초기치 문제가 되어 수치적으로 쉽게 풀릴 수 있다. 이제는 x=0에서 $\frac{dT}{dx}=A$라 가정하여 이 문제를 풀자. 그러면 x=L에서의 T도 알 수 있다. 이 값이 $T=T_L$이면 앞에서 가정한 x=0에서 $\frac{dT}{dx}=A$가 타당한 값이 되고 우리가 구한 해도 타당한 해가 된다. A값을 찾기 위한 방법은 여러 가지가 있고 이에 대해서는 수치해석 교과서를 참조하라.

<u>비정상 상태 문제</u>

지배 방정식

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{d^2T}{dx^2}$$

경계조건

$x=0$ 에서 $T=T_0$

$x=L$ 에서 $T=T_L$

초기 조건

$x=0$ 에서 $T=f(x)$

시간에 대해서는 전방 차분 근사, 공간(여기에서는 x)에 대해서는 중앙 차분 근사를 사용하자.

$$\frac{T_j^{i+1} - T_j^i}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{j+1}^i - 2T_j^i + T_{j-1}^i}{\Delta x^2}$$

따라서

$T_j^{i+1} = T_{j+1}^i \left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right) T_{j+1}^i - \left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} - 1 \right) T_j^i + \left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right) T_{j-1}^i$ 가 되고 이 관계를 이용하면 온도 분포를 양함수적으로 구할 수 있다. 해의 안정성을 고려하면 $\left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} - 1 \right) \leq 0$ 의 조건을 만족해야 한다. 즉 시간과 거리에 대한 증분은 서로 독립적으로 결정될 수 없다.

만약 초기치 문제에 대한 해법이 알려져 있다고 가정하면

$\frac{\partial T_j}{\partial t} = \alpha \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{\Delta x^2}$ 과 같이 x에 대해서만 차분화하여 M+1의 연립 상미분 방정식이 얻어진다. 따라서 편미분 방정식이 M+1개의 상미분 방정식으로 근사된다. 이러한 방법을 직선군법(method of lines)라고 한다.