Chap 7. 물체 표면에 따른 강제대류

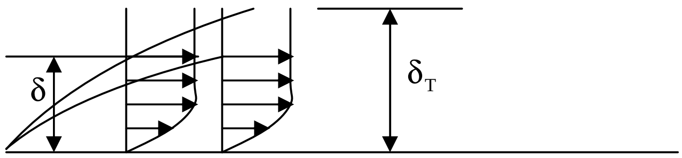
7.1 기본 개념

<u>무차원 변수</u>

강제대류를 해석하는 과정에서 열전달에 영향을 주는 변수는 $x, k, u, \rho, \mu, c_p, h$ 라 가정하면 이 변수들로부터 구성되는 독립적인 무차원 수는 $Nu = hx/k$, $Pr = c_p\mu/k$, $Re = \rho ux/\mu$ 이다. 따라서 다음과 같은 형태로 열전달 상관식을 생각할 수 있다.

$$Nu = f(Re, Pr)$$

<u>속도 경계층 및 열 경계층</u>



δ : 속도 경계층 깊이 : 점성 효과가 중요한 영역
δ_T : 열 경계층 깊이 : 가열(또는 냉각) 효과가 미치는 영역

$$\frac{\delta_T}{\delta} = f(Pr)$$

-Prandtl 수
액체 금속 : 0.1 이하
기체 및 물과 같은 저분자 액체 : 1-10
실리콘 오일과 같은 고점도 액체 : 100이상
물 : 7
공기 : 0.7
수은: 0.025

경계층 내의 유동이 층류가 유지되는 영역 : $\mathrm{Re}_x = \frac{\rho u x}{\mu} \le 5 \times 10^5$

<u>열전달 계수</u>

벽면 근처에서는 유체는 정지되어 있으므로 벽면으로부터 벽표면과 이웃한 유체사이의 열전달은 전도만에 의한다. 따라서

$$q = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

벽면의 온도를 T_W 벽과 멀리 떨어진 곳에서의 유체의 온도를 T_∞ 라 하면 열전달 계수 h를 사용하면 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$q = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = h(T_W - T_\infty)$$

따라서 열전달 계수 h는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$h = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \Big/ (T_W - T_\infty)$$

따라서 벽면 근처에서의 온도 분포를 알 수 있으면 열전달 계수를 구할 수 있으나, 흐름이 존재하는 경우에는 앞에서 다룬 전도의 경우와는 달리 온도 분포를 쉽게 구할 수 없다.

흐름 방향을 따라 $x = 0$ 에서 $x = L$ 까지에서의 평균 열전달 계수는 다음과 같이 정의된다.

$$h_m = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) dx$$

따라서 $x = 0$ 에서 $x = L$ 까지에서의 평균 열전달 속도는 다음과 같이 주어진다.

$$Q = wLh_m(T_W - T_\infty)$$

w: 고체 판의 너비

7.2 평판에 따른 층류

평판 위를 지나는 흐름에 대한 연속 방정식, Navier-Stokes 식은 다음과 같이

된다.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

흐름 방향을 따라서는 압력의 변화가 없으므로 $\frac{\partial p}{\partial x}=0$, 크기 위수 해석을 통하면 위의 식은 다음과 같이 간략화 된다.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

위의 식을 유사변수와 흐름함수를 도입하여 상미분 방정식으로 변환한 후 수치해법을 사용하면 엄밀해를 얻을 수 있다. (유체역학 교과서(예를 들면, Denn, M.M., Process Fluid Mechanics, Chap 15) 참고)
속도 분포의 근사해는 다음과 적분형 운동량 방정식에 대하여 (유도과정은 Denn, M.M., Process Fluid Mechanics, Chap 15를 참고)

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^\delta u(u_\infty-u)dy\right]=\nu\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

속도 분포를 다음과 같이 가정하고

$$u=u_\infty\left(a+b\left(\frac{y}{\delta}\right)+c\left(\frac{y}{\delta}\right)^2+\cdots\right)$$

적절한 경계조건을 적용하여 상수들 a,b,c …를 결정하여 속도 분포를 얻고 이 속도 분포를 위의 적분형 운동량 방정식에 대입하여 속도 경계층 깊이 δ를 구한다. 자세한 과정은 교과서 참고.

경계조건을 세개 사용하고 속도 분포를 2차로 근사한 결과는

$$u = u_\infty \left[2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right]$$

$$\frac{\delta(x)}{x} = \sqrt{\frac{30}{Re_x}}$$ (수치해: $\frac{\delta(x)}{x} = 5\sqrt{\frac{1}{Re_x}}$)

온도분포는 위의 방정식에 다음과 같은 에너지 방정식을 부가하여 풀면 얻을 수 있다.

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

이 식은 앞의 운동량 수지식과 비슷하고($Pr(=\nu/\alpha)=1$ 인 경우에는 완전히 동일하다), 운동량 수지식을 먼저 풀고 에너지 방정식은 이와 별개로 따로 풀 수 있으므로 위와 비슷한 해석 방법을 적용할 수 있다.
속도 분포와 마찬가지 방법으로 온도 분포를 구하면

$$\theta = 2\left(\frac{y}{\delta_t}\right) - \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^2$$

$$\frac{\delta_t(x)}{x} = \left(\frac{4}{5}\right) Pr^{-1/3} \sqrt{\frac{30}{Re_x}}$$

열전달 계수
온도 분포가 구해지면

$$h = -k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} \Big/ (T_W - T_\infty)$$

의 관계를 이용하여 열전달 계수 h를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$h(x) = k\frac{2}{\delta_t}$$

따라서

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{h(x)x}{k} = \frac{2x}{\delta_t} = 0.309\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$: 이식은 적분법 근사를 사용하여 얻은 근사식임을 염두에 두라.

*Pohlhausen의 결과(엄밀해): $\mathrm{Re}_x < 5\times10^5$ 인 층류 영역에 대하여

$$\mathrm{Nu}_x = 0.332\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \qquad (0.6<\mathrm{Pr}<10)$$

$$\mathrm{Nu}_x = 0.339\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \qquad (\mathrm{Pr}\to\infty)$$

$$\mathrm{Nu}_x = 0.564\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/2} \qquad (\mathrm{Pr}\to 0)$$

-Pr이 아주 작은 경우에는 Re에 대한 지수가 1/3에서 1/2로 바뀐다. 그 이유는 Pr이 아주 작은 경우에는 속도에 대한 경계조건에 벽면에서 no-slip대신 slip 조건을 사용하여야 하기 때문이다.

위의 상관관계는 모두 국지 Nuselt 수 상관식이다. 실제는 x=0에서 x=L까지의 평균 Nusselt 수를 사용하는 것이 더 편리하다. 다음과 같이 정의되는 평균 Nusselt 수는 국지 Nusselt 수의 계수에 2를 곱하면 된다.

$$\mathrm{Nu}_m = \frac{h_m L}{k}$$

여기서

$$h_m = \frac{1}{L}\int_0^L h(x)\,dx$$

이므로, 이 관계와 위의 국지 Nusselt 수 상관관계에서 h(x)를 구하여 평균 Nusselt 수 상관관계를 한 번 유도해 볼 것!

7.3 평판을 따라서의 난류

Reynolds-Colburn 유사성

난류의 경우에 마찰인자와 열전달 계수사이에는 다음과 같은 관계가 주어진다.

$$\mathrm{St}_x\,\mathrm{Pr}^{2/3} = \frac{1}{2}c(x)$$

$$\mathrm{St}_x = \frac{\mathrm{Nu}_x}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}_x}$$

마찰인자 c(x)는 열전달 계수보다 잘 알려져 있기 때문에 위의 관계식을 사용하면 난류에서의 열전달 상관식을 유도할 수 있다. 이 관계를 이용하여 유도된 열전달 상관식들이 식 (7-33)에서 식 (7-37)로 주어져 있으므로, 각 식이

제안하는 적용 범위 안에서 식들을 사용하면 된다.

7.4 단일 원형 실린더와 직교하는 흐름

이 경우에 평균 열전달 상관식이 식 (7-40)에서 식 (7-42)로 주어진다. 따라서 각 식이 제안하는 적용 범위 안에서 식들을 사용하면 된다.
그림 7-9를 보면 각도에 따른 국부 Nusselt수가 나와 있는데, 그림에서 보듯이 두개의 극소값이 존재한다. 첫번째 극소점 까지는 평판에서의 경계층 흐름과 같이 흐름 방향으로 진행함에 따라(각도가 증가함에 따라) 경계층 두께가 두꺼워지므로 열전달 계수는 감소하게 된다. 그러다가 경계층이 층류에서 난류로 천이하는 $\theta = 80°$ 정도에서 증가하기 시작한다. 만약 흐름의 박리가 존재하는 Reynols수 범위에서는 난류 경계층이 점점 두꺼워지다가 박리가 발생하게 되는데 이 박리점에서 다시 극소값이 보이게 된다.

7.5 단일 비원형 실린더와 직교하는 흐름

이 경우에는 다음과 같은 식에 근거한다.

$$Nu_m = \frac{h_m D_e}{k} = c\left(\frac{uD_e}{\nu}\right)^n$$

상수 c, 지수 n 및 특성길이 D_e는 표 7-2에 정리되어 있다.

7.6 단일 구와 직교하는 흐름

이 경우의 열전달 상관식은 다음과 같이 주어진다.

$$Nu_m = 2 + f(Re, Pr)$$

여기서 상수 2의 의미는 Reynolds수가 0인 경우, 즉 흐름이 존재하지 않는 경우의 Nusselt 수로 다음과 같이 유도된다.
흐름이 존재하지 않으므로, 전도에 의한 열전달 만이 존재한다. 따라서 구 주위의 온도 분포는 다음식에 의하여 지배된다.

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(kr^2\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

경계조건은

r=R(구의 표면) 에서 $T = T_w$

$r \to \infty$ (구에서 멀리 떨어진 곳)에서 $T = T_\infty$

위의 식을 풀면

$$\frac{dT}{dr} = \frac{c_1}{r^2}$$

$$T = -\frac{c_1}{r} + c_2$$

경계조건을 적용하면

$$T = -\frac{R}{r}\left(T_\infty - T_w\right) + T_\infty$$

구의 표면에서 다음과 같은 조건을 적용할 수 있다.

$$Q = -k4\pi R^2 \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R} = h4\pi R^2\left(T_w - T_\infty\right)$$

따라서

$$k\frac{\left(T_w - T_\infty\right)}{R} = h\left(T_w - T_\infty\right)$$

$$\frac{hR}{k} = 1$$

$$Nu = \frac{hD\left(= 2R\right)}{k} = 2$$