

제 6 장

열전달

제 1 절 다중 벽을 통한 1차원 열전달

1.1 개념 설명

온도에 따른 열 전도도의 변화와 경계조건에 대류가 포함되는 열 전도 문제에 대한 1차원 열속 및 온도 분포 계산

1.2 사용된 수치 해법

경계 조건들을 맞추는 연속되는 상미분 방정식의 해법

1.3 문제 설명

고체와 유체에서의 전도에 의한 열전달은 Fourier 법칙을 따른다. 전도에 의한 1차원 열전달은 다음과 같은 식으로 기술될 수 있다.

$$\frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (6.1)$$

여기서 q_x 는 x 방향으로의 열전달 속도(W, 또는 J/s), A 는 열 전도 방향과 수직인 단면적(m^2), k 는 매질의 열 전도도($W/m \cdot K$)이고, x 는 거리(m)이다. 고체와 액체 사이의 대류 열전달은 다음과 같이 기술된다.

$$\frac{q_x}{A} = h(T_w - T_f) \quad (6.2)$$

여기서 h 는 열전달 계수($W/m^2 \cdot K$), T_w 는 고체 표면의 온도(K)이고, T_f 는 유체의 온도(K)이다. 고체/액체 경계에서의 통상적인 경계조건은 다음과 같이 주어지는 열속의 연속성

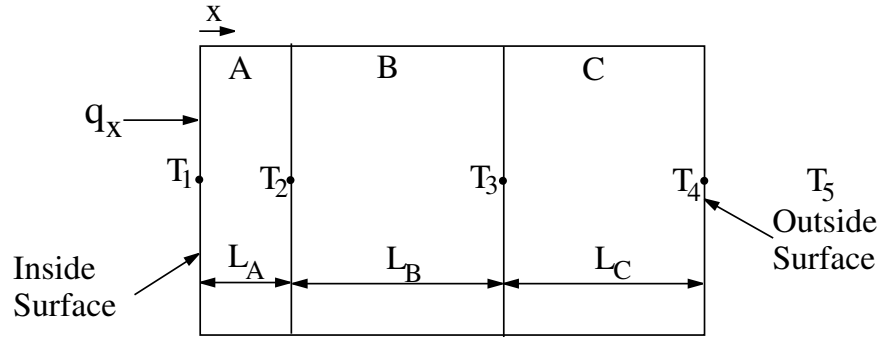


그림 6.1: 다중 벽을 통한 열전달

이다.

$$\frac{q_x}{A}\Big|_S = -k \frac{dT}{dx}\Big|_S = h(T_w - T_f) \quad (6.3)$$

여기서 S 는 온도가 T_w 인 고체 표면을 나타낸다. 서로 다른 두 고체의 경계에서는 다음과 같이 온도의 연속 및

$$T = T_1|_{x=I} = T_2|_{x=I} \quad (6.4)$$

다음과 같이 열속이 연속이어야 한다.

$$\frac{q_x}{A}\Big|_S = -k_1 \frac{dT_1}{dx}\Big|_I = -k_2 \frac{dT_2}{dx}\Big|_I \quad (6.5)$$

여기서 I 는 서로 다른 두 고체의 경계를 나타낸다. 전도에 의한 정상상태 열전달에 대한 에너지 수지식은 다음과 같은 결과를 준다.

$$\frac{dq_x}{dx} = \dot{q}A \quad (6.6)$$

여기서 \dot{q} 는 단위 부피당의 열발생 속도(W/m^3)이다. 만약 식 (6.6)에서 열 발생 항이 0이면 임의의 x 에서의 열전달 속도는 일정하게 된다. Geankoplis [1]에 주어진 문제와 비슷하게 소나무, cork판, 콘크리트 층으로 이루어진 냉장실을 고려하자. 각 층의 두께는 15.0mm, 100.0mm, 75.0mm이다. 각 층에서의 열 전도도는 0.151, 0.0433, 0.762W/m·K이다. 그림 6.1은 소나무, cork판, 콘크리트 층을 각각 A, B, C로 나타낸 벽의 개략도를 보여 준다. 각 경계에서의 온도는 그림에 주어지 있다.

- (a) 만약 내벽의 온도가 255K 외벽의 온도가 298K일 때, 벽을 통한 열속을 계산하라.
- (b) Cork 판의 두께를 증가시켜서 열손실을 50% 정도 줄이는 방안이 제안되었다. 요구되는 cork 판의 총 두께는 얼마인가?
- (c) (a)에서의 cork판 대신에 새로운 재료가 사용될 것이다. 이 재료의 열 전도도는 $k = 2.5 \times \exp(-1225/T)$ 로 주어진다, 여기서 T 는 K. 이 재료에 대하여 (a)를 반복하고, 벽 내부에서의 온도 분포를 도시하라.
- (d) 외벽의 수직 벽에 대한 자연 대류 열전달 계수는 $h = 1.37 | \frac{T_5 - T_4}{6} |^{1/4}$ 로 주어진다, 여기서 T 들은 K. h 를 계산하는데 절대값을 사용함에 주의하라. 이러한 정보와 내벽의 온도가 255K인 것만을 이용하여 (c)를 다시 풀라. 이 경우에 외벽의 온도는 주위 온도 T_5 가 298K일 때 계산되어야 한다. 벽 내부의 온도 분포를 도시하라.

1.4 (부분) 해

(a) 나중 벽 내부에서는 열 발생이 없기 때문에, 식 (6.6)로부터 추론할 수 있는 바와 같이 x 방향으로의 열전달 속도는 일정하다. 따라서 다음과 같은 상미분 방정식 묶음을 주도록 식 (6.1)은 각 층에 대하여 차례로 쓰여져야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= - \left(\frac{q_x}{A} \right) / k_A & 0 \leq x \leq L_A \\ \frac{dT}{dx} &= - \left(\frac{q_x}{A} \right) / k_B & L_A \leq x \leq (L_A + L_B) \\ \frac{dT}{dx} &= - \left(\frac{q_x}{A} \right) / k_C & (L_A + L_B) \leq x \leq (L_A + L_B + L_C) \end{aligned} \quad (6.7)$$

초기 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$T = T_1 \quad \text{when } x = 0 \quad (6.8)$$

경계에서의 온도는 각각 T_2, T_3, T_4 이다. 열 전도도가 일정한 경우에 대하여 식 (6.7)의 미분 방정식 묶음은 적분이 될 수 있고, 결과는 q_x/A 와 총 온도 변화에 대해 다음과 같은 한 방정식으로 나타낼 수 있다(자세한 사항은 Geankoplis [1]에 나와있다).

$$q_x/A = \frac{T_1 - T_4}{L_A/k_A + L_B/k_B + L_C/k_C} \quad (6.9)$$

따라서 q_x/A 는 -17.15 W/m^2 으로 직접 계산된다. 음의 부호는 에너지는 냉장실로 전달되는 것과 같이 열속은 x 의 음의 방향임을 나타낸다. 열전달 방정식을 세우는 유용한 관습

은 열전달은 x 의 양의 방향으로 진행된다고 가정하는 것이고, 결과의 부호는 실제 열 흐름을 나타낸다.

(b) 이 부분은 열속을 $0.5 \times (-17.15\text{W/m}^2)$ 으로 두고, 식 (6.9)을 L_B 에 대하여 풀어서 해결된다.

(c) 열 전도도가 온도의 함수인 경우에, 그 물질에 대한 미분 방정식은 해석적으로 풀기가 어렵다. 이 문제에 대한 한가지 접근법은 열 전도도 k_B 가 온도의 함수로 표현된 식 (6.7)의 미분 방정식 묶음을 푸는 것이다. 이 미분 방정식은 MATLAB의 미분 방정식 해법 ode45를 이용하여 풀 수 있다. 벽 내부의 위치에 의존하는 온도 T 에 대한 미분 방정식을 제어하기 위하여 “if ... elseif ... else ... end”를 이용한다. 최종적인 경계조건을 만족시키는 열속 값을 결정하기 위하여 사격법(shooting method)이 사용된다. 초기 조건은 $x = 0$ 에서 $T = 255$ 이고, 만족해야 할 경계조건은 $x = L_A + L_B + L_C = 0.19$ 일 때 $T = 298$ 이다. 열속(q_x/A)에 대해 변수 Q_x 를 사용하는 경우의 MATLAB 스크립트는 다음과 같이 주어진다.

p601c.m

```
clear all
x0=0;
xf=0.19;
T0=255;
[x,T]=ode45('p601cf',[x0,xf],T0);
plot(x,T)
xlabel('x'), ylabel('T')
axis([0,0.20,250,300])
```

p601cf.m

```
function dTdx=p601f(x,T)
err=T-298;
LA=0.015;
LB=0.1;
kA=0.151;
kB=2.5*exp(-1225/T);
kC=0.762;
Qx=-12.2;
if(x<=LA) dTdx=-Qx/kA;
elseif((x<=(LA+LB))&(x>LA))
```

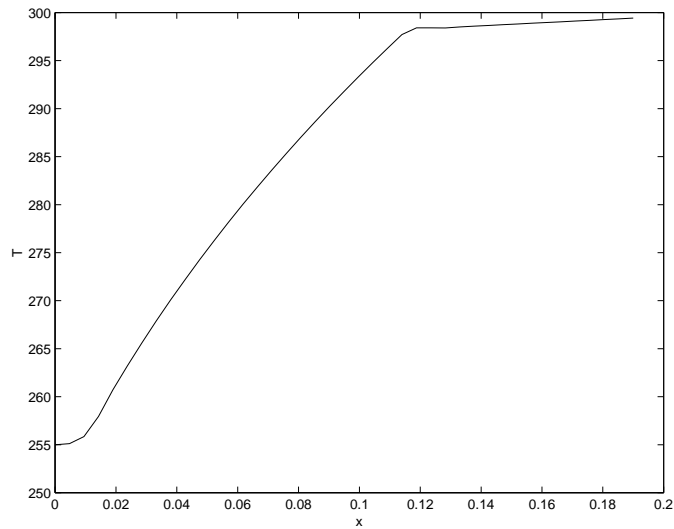


그림 6.2: 다중벽에서의 온도 분포.

```

dTdx=-Qx/kB;
else
    dTdx=-Qx/kC;
end

```

1변수 최적화 기법은 문제 3.5에서 논의되었으며, 문제 3.6에서 논의된 사격법을 열속 Q_x 를 결정하는데 사용될 수 있다. 이 해를 이용하여 그림 6.2에 보이는 바와 같은 온도 분포를 그릴 수 있다. 열 전도도의 온도 의존성 때문에 이 새로운 재료에서의 온도 T 는 거리의 선형 함수가 아님에 주목하라.



(c)에 대한 MATLAB 스크립트 파일은 CHAP6 디렉토리의 p601c.m와 p601cf.m으로 주어져 있다.

(d) 적분이 완료되었을 때의 T_4 와 Q_x 가 알려져 있기 때문에 이 해는 T_5 를 결정하기 위하여 식 (6.3)을 이용하여야 한다. 또 다시 $T_5 = 298$ 을 주는 Q_x 값의 수렴치를 얻기 위한 기법이 사용되어야 한다.

제 2 절 전기적 열원이 있고, 절연된 전선에서의 열 전도

2.1 개념 설명

원통형 좌표계에서, 자연대류 경계조건, 열 전도도가 다른 여러 층의 물질을 통한 1차원 열 전도

2.2 사용된 수치 해법

다양한 최종 경계조건을 맞추기 위해 초기조건을 최적화하기 위하여 사격법을 사용하는 연립 상미분 방정식의 해법과 경계 조건들을 맞추는 연속되는 상미분 방정식의 해법

2.3 문제 설명

절연된 전선에 전류가 통하고 있다. 전류의 흐름은 다음에 따라 열(열 에너지)을 발생시킨다.

$$\dot{q} = \frac{I^2}{k_e} \quad (6.10)$$

여기서 \dot{q} 는 W/m^3 의 단위를 갖고, I 는 전류밀도(A/m^2), k_e 는 전기 전도도($\Omega^{-1}m^{-1}$)이다. 전선의 반지름 $R_1(m)$ 은 일정하다. \dot{q} 는 일정하고 위치에 따라 변하지 않는다는 것은 합리적인 가정이다. 그림 6.3에 보이는 것과 같은 두께 Δr , 길이 L 의 원통형 shell에 대한 에너지 수지식은 다음과 같은 미분 방정식이 된다.

$$\frac{d}{dr}(rQ_r) = \dot{q}r \quad (6.11)$$

여기서 열속 Q_r 은 Fourier 법칙으로부터 다음과 같이 주어진다.

$$Q_r = -k \frac{dT}{dr} \quad (6.12)$$

전도와 대류는 문제 6.1에서 논의되었다.

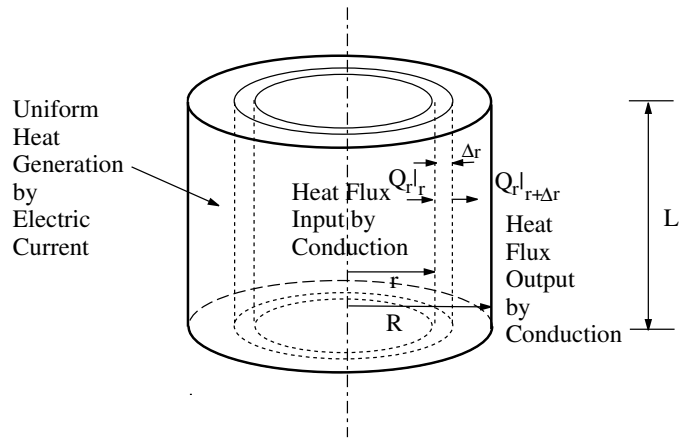


그림 6.3: Shell 수지식을 위한 미분 부피

- (a) 만일 전선의 표면이 $T_1 = 15^\circ\text{C} = 288.15\text{K}$ 로 유지되고, 전기 전도도와 열 전도도가 각각 $k_e = 1.4 \times 10^5 \exp(0.003T)\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ 과 $k = 5\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$ 로 주어진다면 전선 내의 온도와 열속을 계산하고 도시하라.
- (b) 전선 표면에서 자연 대류에 의한 열전달 계수가 $h = 1.32(|\Delta T|/D)^{1/4}$ 로 주어진다, 여기서 h 는 W/m^2 , ΔT 는 K, D 는 m의 단위를 갖는다. 전선 표면에서의 열속을 계산하고, 전선 내부의 온도 분포를 도시하라. 주위의 온도는 $T_b = 15^\circ\text{C} = 288.15\text{K}$ 이다. 전선의 반지름은 $R_1 = 0.004\text{m}$ 이고, 총 전류는 $I = 50\text{A}$ 로 유지된다.
- (c) 전선은 바깥 반지름이 $R_2 = 0.015\text{m}$ 인 절연층으로 쌓여져있다. 이 절연층의 열 전

타내어지는 Fourier 법칙은 다음과 같이 변형된다.

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{Q_r}{k} \quad (6.14)$$

여기서 최종조건은 $r = R_1$ 에서 $T = T_1$ 이다. 따라서 문제는 분리된 경계조건과 $r = 0$ 에서의 T 에 대한 초기조건, 즉 T_0 를 최적화하는 사격법을 포함한다. 문제 3.5에서 개발된 표기법과 논리를 사용하면, 최종 조건에서의 오차를 나타내는 목적함수는 다음과 같이 쓰여진다.

$$\epsilon(T_0) = T|_{r=R_1} - 288.15 \quad (6.15)$$

따라서 온도 T 에 대한 초기조건은 288.15K로 알려진 T 의 최종값을 내도록 최적화되어야 한다. 최적화된 초기조건이 결정되면, 식 (6.15)의 우변의 값은 최종조건에서 근사적으로 0이된다. 이 문제에 대한 수식화 과정에 다음과 같은 대수 방정식이 사용된다.

$$Q_r = \frac{(rQ_r)}{r} \quad (6.16)$$

이 식은 결합된 변수 (rQ_r)에서 식 (6.14)에 쓰이는 Q_r 을 결정하는데 필요하다. 식 (6.16)에서 $r = 0$ 에서 0으로 나누는 것은 MATLAB의 “if ... else ...”를 사용하여 $r = 0$ 에서 $Q_r = 0$ 으로 둬으로써 피할 수 있다. 따라서 이 문제는 다음과 같이 식 (6.13)에서 (6.16)까지를 연립된 형태로 나타내야 된다. 이 방정식 묶음은 $r = 0$ 에서 T 에 대한 초기조건을 결정하는 1변수 탐색의 최종 결과를 준다.

p602a.m

```
clear all
r0=0;
rf=0.004;
T0=400;
rQr0=0;
eps=1e-6;
err=1;
derr=1;
while(abs(err/derr)>1e-3)
    [r,T]=ode45('p602af',[r0, rf],[T0, rQr0]);
    n=length(r);
    Tn=T(n,1);
    err=Tn-288.15;
    T0=T0+eps;
    [r,T]=ode45('p602af',[r0, rf],[T0, rQr0]);
```



```

    Tn=T(n,1);
    err1=Tn-288.15;
    T0=T0-eps;
    derr=(err1-err)/eps;
    T0=T0-err/derr;
end
for i=1:n
if(r(i)>0)
Qr(i)=T(i,2)/r(i);
else
Qr(i)=0;
end
end
% Temperature Profile
figure(1);
plot(r,T(:,1));
xlabel('r'), ylabel('T')
axis([0,0.004,270,420])
%Heat Flux Profile
figure(2);
plot(r,Qr);
xlabel('r'), ylabel('Qr')
axis([0,0.004,0,3e5])

```

p602af.m

```

function dTdr=p602af(r,T)
dTdr=zeros(2,1);
k=5.;
ke=1.4E5*exp(0.0035*T(1));
R1=0.004;
I=400/(pi*R1^2);
qdot=I^2/ke;
if(r==0) Qr=0;
else
    Qr=T(2)/r;
end
dTdr(1)=-Qr/k;
dTdr(2)=qdot*r;

```

온도 분포가 그림 6.4에 주어져 있다. 계산된 온도 분포는 $r = 0$ 에서 기울기가 0인 결과를 주며, $r = 0.004\text{m}$ 에서 원하는 경계조건 $T = 288.15\text{K}(15^\circ\text{C})$ 를 맞춘다. 열속 Q_r 은 그림 6.5에서 보는 바와 같이 반지름에 대하여 비선형적이다. 이 수치해는 문제 5.1의 해와 비슷하다. 이는 Bird et al. [2]의 접근법에서 강조되었던 관에서의 점성 흐름과 이 가

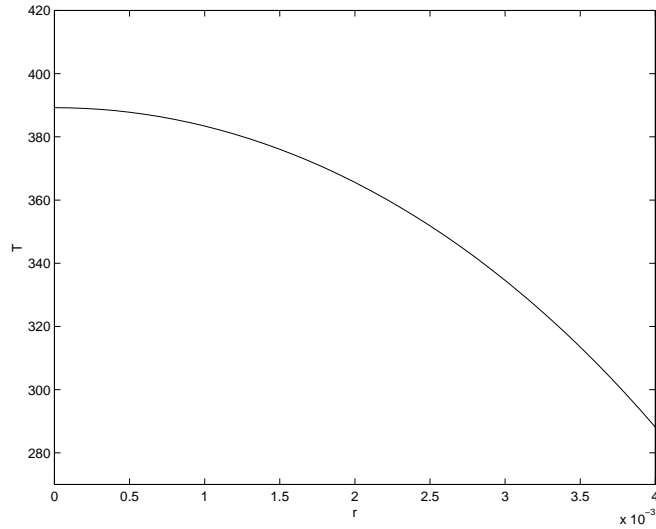


그림 6.4: 표면 온도가 288.15K(15°C)로 고정된 경우의 전선에서의 온도 분포

열되는 전선 문제와의 유사성을 보여준다.

(b) (a)에서 사용되었던 미분 방정식들이 적용된다. 그러나 최종 경계조건은 $r = R_1$ 에서 전선 표면으로부터 주위로의 대류를 고려하여야 한다. 전선 표면에서의 에너지 수지는 식 (6.3)에서 전개된 바와 같이 전선 표면에서의 전도(에의한 열속)가 전선 표면으로부터의 주위로의 대류(에의한 열속)와 같게 됨으로써 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$Q_r|_{r=R_1} = -k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=R_1} = h(T|_{r=R_1} - T_b) \quad (6.17)$$

여기서 주위의 온도는 T_b 로 표현되었다. 식 (6.17)의 에너지 수지식에서의 오차에 근거한 목적함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\epsilon(T_0) = Q_r|_{r=R_1} - h(T|_{r=R_1} - T_b) \quad (6.18)$$

이 양은 변수 Q_r 과 T 가 최종 경계에서 계산될 때 0이 된다. 따라서 T 에 대한 초기조건을 최적화하는 1 변수 탐색이 필요하게 된다.

계산된 온도 분포는 그림 6.6에 주어져 있다. 그림에서 보듯이 전선 표면에서 주위의 자연대류의 구동력인 온도차가 크고 비교적 평평한 온도분포가 얻어진다.

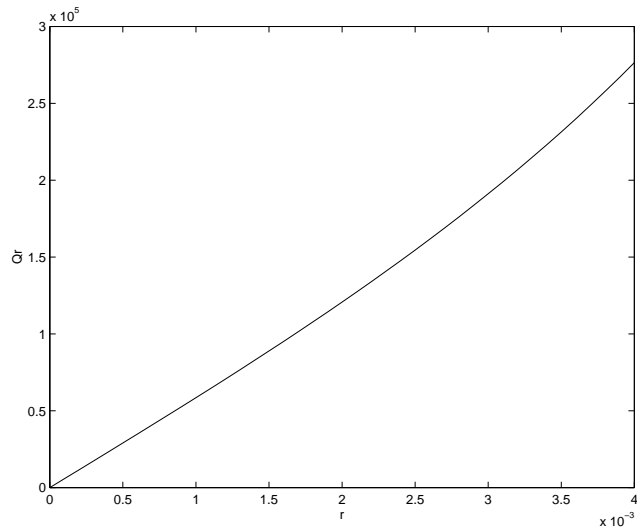


그림 6.5: 표면 온도가 288.15K(15°C)로 고정된 경우의 전선에서의 열속 분포



(a)에 대한 MATLAB 스크립트 파일은 CHAP6 디렉토리의 p602a.m와 p602af.m으로 주어져 있다.

```
clear all
r0=0;
rf=0.004;
D=2*rf;
T0=457;
rQr0=0;
eps=1e-6;
err=1;
derr=1;
while(abs(err/derr)>1e-3)
    [r,T]=ode45('p602bf',[r0, rf],[T0, rQr0]);
    n=length(r);
    Tn=T(n,1);
    Qrn=T(n,2)/r(n);
    deltaT=abs(Tn-288.15);
    h=1.32*(deltaT/D)^(1/4);
    err=Qrn-h*deltaT;
    T0=T0+eps;
    [r,T]=ode45('p602bf',[r0, rf],[T0, rQr0]);
    Tn=T(n,1);
    Qrn=T(n,2)/r(n);
    deltaT=abs(Tn-288.15);
    h=1.32*(deltaT/D)^(1/4);
```

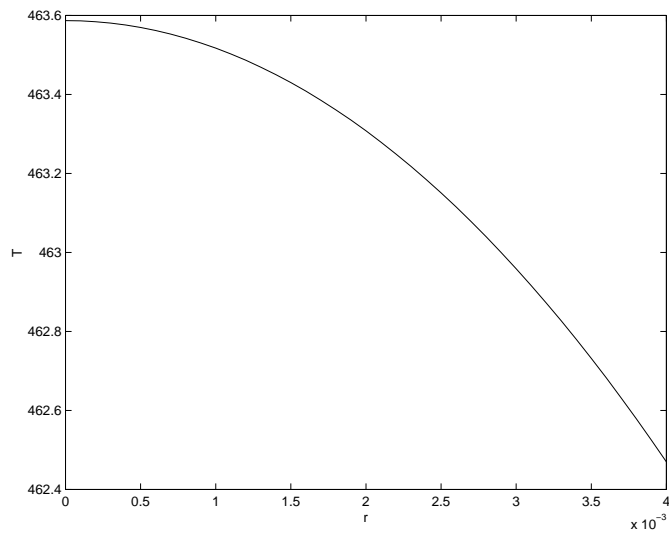


그림 6.6: 자연대류 경계조건의 경우에 전선에서의 온도 분포

```

err1=Qrn-h*deltaT;
T0=T0-eps;
derr=(err1-err)/eps;
T0=T0-err/derr;
end
% Temperature Profile
plot(r,T(:,1));
xlabel('r'), ylabel('T')

p602bf.m

function dTdr=p602bf(r,T)
dTdr=zeros(2,1);
k=5.;
ke=1.4E5*exp(0.0035*T(1));
R1=0.004;
I=50/(pi*R1^2);
qdot=I^2/ke;
if(r==0) Qr=0;
else
    Qr=T(2)/r;
end
dTdr(1)=-Qr/k;
dTdr(2)=qdot*r;

```



(b)에 대한 MATLAB 스크립트 파일은 CHAP6 디렉토리의 p602b.m와 p602bf.m으로 주어져 있다.

(c) 절연층에는 열 생성항이 없는 전도식이 사용되어야 하고, 다른 열 전도도가 사용되어야 한다. 따라서 절연층에서의 방정식 묶음은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rQ_r) &= 0 & R_1 < r < R_2 \\ \frac{dT}{dr} &= -\frac{Q_r}{k_I} & R_1 < r < R_2 \\ Q_r &= \frac{(Q_r r)}{r} & R_1 < r < R_2 \end{aligned} \quad (6.19)$$

위의 변화는 문제 6.1에서 언급된 바와 같이 MATLAB의 “if ... else ... ”에 의하여 구현될 수 있다. (b)의 경계조건이 R_2 에서 앞의 방정식에 대해 적용될 수 있다.

제 3 절 경계에서 대류가 있는 경우 전도에 의한 반경 방향 열전달

3.1 개념 설명

양쪽 경계에서 대류가 있고 열 전도도가 일정한 경우에 반경 방향의 열전달.

3.2 사용된 수치 해법

부가적인 양함수적 대수 방정식과 연관된 비선형 대수 방정식의 해

3.3 문제 설명

열 전도도가 $k = 26\text{Btu/h} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F}$ 인 2in, schedule 40 강철 관 안에 60psia (292.73°F)의 저압 포화 수증기가 있고, 강철관은 열 전도도가 $k = 0.05\text{Btu/h} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F}$ 인 단열재로 덮혀 있다. 수증기 쪽의 열 전달 계수는 $h_i = 2000\text{Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}$ 이고, 공기쪽의 열전달 계수는 $h_o = 4\text{Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}$ 이다. 주위 공기의 온도는 70°F 이다.

(a) 단열재의 두께가 1in이면, foot당의 열손실을 계산하라.

(b) 관의 foot당 열손실이 50Btu/h 이하가 되는데 필요한 단열재의 외부 반지름은?

부가적인 정보 및 데이터

그림 6.7에서 설명되는 경우에, 원통형 계에서 여러 열전달 저항과 두 물질이 직렬로 연

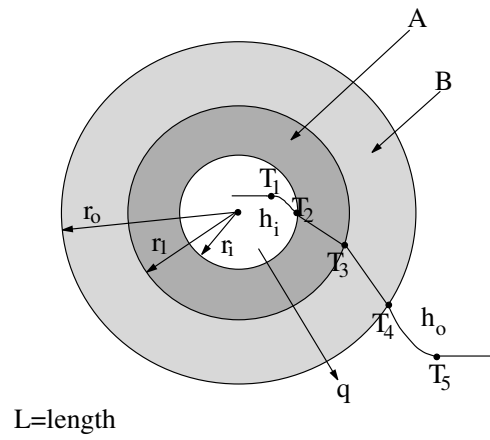


그림 6.7: 경계에서 대류가 있는 두 종류의 물질을 통한 전도의 경우에 일반적인 반경 방향 온도 분포

(b) 식 (6.20)을 r_o 에 대한 비선형 방정식으로 보고 양함수적 대수 방정식으로 주어지는 부가적인 계산을 하면, r_o 의 값은 결정될 수 있다. (a)에서 사용되었던 방정식에 대한 약간의 수정이 요구된다.

제 4 절 단열된 관으로부터의 에너지 손실

4.1 개념 설명

열 전도도가 온도의 함수이고 경계에서 자연대류 경계조건이 적용되는 경우에 관 단열재 내에서의 반경방향 열 전도

4.2 사용된 수치해법

경계조건을 최적화하기 위한 사격법 및 연립 상미분 방정식의 해법

4.3 문제 설명

450K의 수증기가 흐르는 수평 강철 관이 열 전도도가 온도에 따라 변화는 새로이 개발된 물질로 단열되어 있다. 온도에 따른 열 전도도는 표 6.1에 주어져 있다. 관 내부의 유효 열전달 계수와 강철 관의 열 전도도가 크기 때문에 강철관의 온도는 수증기의 온도와 같다고 가정된다. 강철관의 외부 지름은 0.033m이고, 주위의 온도는 300K이다. 외부 공기에서의 자연대류에 의한 원통 표면으로부터의 외부 열전달 계수는 다음과 같이 근사된다(Geankoplis [1] 참조).

$$h = 1.32 (|\Delta T| / D)^{1/4} \quad (6.22)$$

여기서 h 는 열전달 계수($W/m^2 \cdot K$)이고, ΔT 는 표면과 공기 사이의 온도차(K)이고, D 는 원통의 지름(m)이다.

제 4 절 단열된 관으로부터의 에너지 손실

17

450	0.094
500	0.098

제 5 절 관 flange로 부터의 열 손실

5.1 개념 설명

대류가 동시에 일어나는 반경 방향의 1차원 열 전도. 대류 손실에 대한 다양한 주위 온도의 영향과 서로 다른 물질로 이루어진 관 flange를 통한 열 손실 계산.

5.2 사용된 수치해법

사격법을 사용하는 상미분 방정식의 두점 경계치 문제의 해법 및 1변수 최적화

5.3 문제 설명

그림 6.8에 보이는 바와 같이 금속관들은 관의 끝에 있는 두 flange를 볼트없이 붙여서 연결된다. 이 연결부들은 단열되어 있지 않았기 때문에 관들은 쉽게 분리된다. 열전달에서는 이 연결부는 두 관 flange로 만들어진 고체 금속 원통으로 고려된다. 그림 6.8에 보이는 바와 같이 단열되지 않은 연결부를 고려하자. 관 내의 유체의 온도는 260°F 이다.

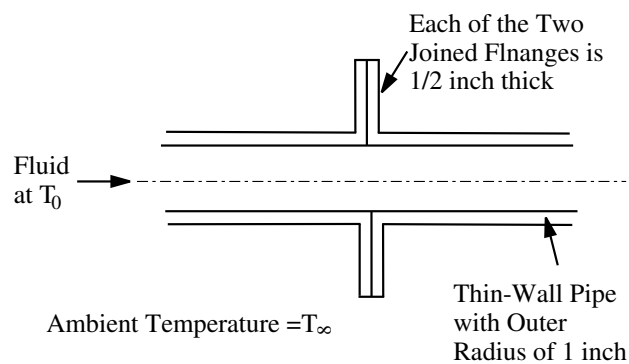


그림 6.8: 두 관 flange로 구성된 연결부의 단면

- (a) 표 6.2에 나와있는 금속중의 하나를 선택하고, 평균 외부 온도가 $T_{\infty} = 60^{\circ}\text{F}$ 일 때 평균적으로 하루에 flange 하나로부터의 총 열손실을 계산하라. 열 전도도는 표 6-2에 주어진 212°F 에서 주어진 값으로 일정하다고 가정하라.
- (b) (a)의 경우에 반지름에 따른 열전달 속도와 온도를 도시하라. 총 열손실 중에 flange의 끝으로부터는 몇 %의 열이 손실되는가?
- (c) 추운 겨울날($T_{\infty} = 10^{\circ}\text{F}$)과 아주 더운 여름날($T_{\infty} = 100^{\circ}\text{F}$)에 대하여 (a)에서의 같은 물질에 대하여 총 열손실을 계산하라.

표 6.2: 몇 가지 금속의 열 전도도

Metal	Thermal Conductivity (btu/h · ft · ° F)		
	68°F	212°F	572°F
Aluminum	132	133	133
Copper	223	219	213
Iron	42.3	39	31.6
Stainles Steel	9.4	10.0	13
Steel (1% C)	24.8	24.8	22.9

5.4 (부분) 해

두 flange로 이루어진 연결부는 대칭이고, 따라서 그림 6-9에 보이는 바와 같이 노출된 한 원형 면과 rim으로부터의 열 손실과 연관된 한 flange만이 고려된다. 대칭 때문에 원형 면의 다른 면, 즉 대칭면을 통한 열전달은 없으므로, 대칭면을 단열면으로 고려한다. 따라서 문제는 온도가 반지름 방향의 함수인 1차원 문제가 된다. 내부면 $r = R_1$ 에서의 경계조건은 유체의 온도가 된다. 관은 아주 얇기 때문에 관의 두께는 무시된다. 외부 표면 $r = R_2$ 에서의 경계조건은 표면에서 주위 온도 T_{∞} 로의 열 대류로 결정된다.

에너지 수지는 그림 6.9에서 보이는 flange 내부의 미분 부피에 대하여 세워진다. 여기서 q_r 은 r방향으로의 전도에 의한 총 열전달 속도(Btu/min)이다.

$$\text{입력} + \text{생성} = \text{출력} + \text{축적}$$

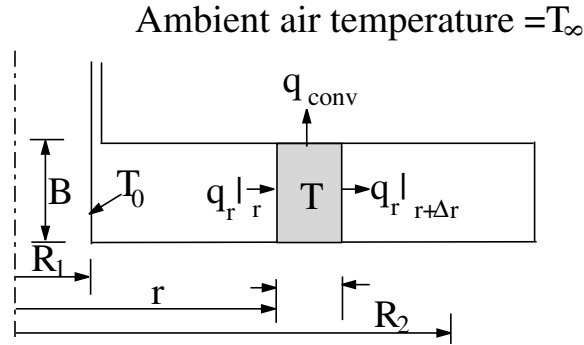


그림 6.9: 연결부의 반을 형성하는 관 flange의 단면

$$q_r|_r + 0 = q_r|_{r+\Delta r} + h(2\pi r)\Delta r(T - T_\infty) + 0 \quad (6.23)$$

앞의 식을 정리하고 $\Delta r \rightarrow 0$ 의 극한을 취하고 q_r 에 대한 도함수의 정의를 이용하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dq_r}{dr} = -h(2\pi r)(T - T_\infty) \quad (6.24)$$

반지름 r 에서 열전달 속도 q_r 와 열속 Q_r 사이의 관계에는 반지름 r 에서의 열 전도에 대한 단면적이 필요하고, 다음과 같은 결과가 된다.

$$q_r = Q_r(2\pi r)B \quad (6.25)$$

식 (6.25)를 식 (6.24)에 대입하면, 다음과 같은 식이 유도된다.

$$\frac{d}{dr}(rQ_r) = \frac{-hr(T - T_\infty)}{B} \quad (6.26)$$

여기서 Q_r 은 열속($\text{Btu}/\text{ft}^2 \cdot \text{h}$)으로 Fourier 법칙으로부터 계산되어 다음과 같이 주어지고,

$$Q_r = -k \frac{dT}{dr} \quad (6.27)$$

정리하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{dT}{dr} = (-Q_r)/k \quad (6.28)$$

앞의 식에서 h 는 열전달 계수($\text{Btu}/\text{h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}$)이고, k 는 금속의 열 전도도($\text{Btu}/\text{h} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F}$)이고, B 는 flange의 두께(ft)이다. 대수 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$Q_r = \frac{rQ_r}{r} \quad (6.29)$$

따라서 열전달 공정을 기술하는 미분 방정식은 식 (6-26)과 (6-28) 및 식 (6.29)로 주어지는 대수적 관계로 구성된다. 식 (6-29)는 문제에서 변수로 사용되는 변수가 두 변수의 곱 rQ_r 이므로, Q_r 을 계산하는데 사용된다. 식 (6.26)에 대한 (최종) 경계조건은 rim으로 전도에 의한 열속을 대류에 의해 rim으로부터 전달되는 열속을 같게 두는 rim에 대한 에너지 수지식으로부터 얻을 수 있다. 따라서 다음과 같은 식이 얻어지며,

$$Q_r|_{r=R_2} = h(T - T_\infty)|_{r=R_2} \quad (6.30)$$

변수 rQ_r 은 다음 식으로부터 계산된다.

$$(rQ_r)|_{r=R_2} = R_2h(T - T_\infty)|_{r=R_2} \quad (6.31)$$

식 (6.28)을 위한 초기조건은 다음과 같이 반지름 $r = R_1$ 에서 온도는 T_0 로 주어지는 관 내의 유체와 같게 된다는 것이다.

$$T|_{r=R_1} = T_0 \quad (6.32)$$

(a) 관과 flange가 알루미늄으로 된 경우에 매개인자 값들은 $k = 133\text{btu/h} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F}$, $T_0 = 260^\circ\text{F}$, $T_\infty = 60^\circ\text{F}$, $h = 3\text{btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}$ 로 주어진다. 식 (6.26)과 (6-28)의 미분 방정식을 풀기 위하여 문제 3.5, 6.2 및 6.4에서 논의된 사격법을 이용할 수 있다. 식 (6-26)의 초기 조건은 변수 rQ_r 에 대하여 결정되어야 하고, 식 (6-31)의 경계조건(최종조건)을 만족시켜야 한다. 이를 위하여 목적함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\epsilon(rQ_r) = (rQ_r)|_{r=R_2} - R_2h(T - T_\infty)|_{r=R_2} \quad (6.33)$$

따라서 (rQ_r) 의 초기조건은 식 (6.33)으로 계산되는 목적함수를 최소화하는 1변수 탐색을 사용하여 최적화되어야 한다.

이 문제를 풀기위한 MATLAB 스크립트는 다음과 같다.

p605.m

```
clear all
r0=0.08333;
rf=0.25;
B=0.5/12;
T0=260;
rQr0=500;
```

```

h=3;
Tinf=60;
eps=1e-6;
err=1;
derr=1;
while(abs(err/derr)>1e-3)
    [r,T]=ode45('p605f',[r0, rf],[T0, rQr0]);
    n=length(r);
    n=n(1,1);
    T2=T(n,1);
    rQr2=T(n,2);
    r2=r(n);
    err=rQr2-r2*h*(T2-Tinf);
    rQr0=rQr0+eps;
    [r,T]=ode45('p605f',[r0, rf],[T0, rQr0]);
    T2=T(n,1);
    rQr2=T(n,2);
    err1=rQr2-r2*h*(T2-Tinf);
    rQr0=rQr0-eps;
    derr=(err1-err)/eps;
    rQr0=rQr0-err/derr;
end
qr=2*pi*B*T(:,2);
%Heat Transfer Rate Profile
plot(r,qr);
xlabel('r'), ylabel('qr')
axis([0.06,0.26,20,160])

```

p605f.m

```

function dTdr=p605f(r,T)
dTdr=zeros(2,1);
k=133;
h=3;
B=.5/12;
Tinf=60;
Qr=T(2)/r;
dTdr(1)=-Qr/k;
dTdr(2)=-h*r*(T(1)-Tinf)/B;

```



(a)부분의 문제를 풀기위한 Matlab 스크립트는 CHAP6 디렉토리의 p605.m과 p605f.m으로 주어져 있다.

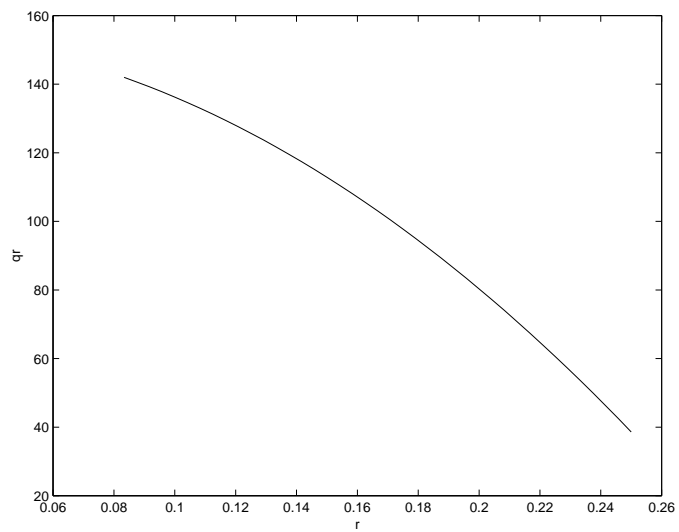


그림 6.10: 반지름의 함수로 주어진 flange에서의 열전달 속도

(b) 여러 r 값에서의 열전달 속도 q 는 위의 수렴된 결과와 앞의 스크립트에 포함된 식 (6.25)로부터 계산될 수 있다. 결과는 그림 6.10에 주어져 있다. Flange의 끝에서의 열전달 속도는 38.6btu/h이고 R_1 에서의 열전달 속도는 142btu/h이다. 따라서 끝에서의 열손실 비율은 27.2%이다.

제 6 절 가열되는 벽면에 붙어있는 수평 원통으로부터의 열전달

6.1 개념 설명

대류 및 복사가 있는 막대에서 전도에 의한 1차원 열전달

6.2 사용된 수치해법

경계조건의 다양성에 대하여 수렴을 위한 사격법을 사용하는 연립 상미분 방정식의 해법

6.3 문제 설명

그림 6-11에서 보는 바와 같이 수평 원형 막대(원통)가 $T_0 = 275^\circ\text{F}$ 로 일정하게 유지되는 수직 벽으로부터 T_∞ 의 주위 공기로 열을 전달하는데 사용된다. 막대의 옆면으로부터의 자연대류는 다음과 같이 주어진다.

$$h_s = 0.27 |\Delta T / D|^{1/4} \quad (6.34)$$

여기서 h_s 는 열전달 계수($\text{btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}$)이고, ΔT 는 막대 표면온도 T 와 주위 공기의 온도 T_∞ 의 차이(K)이고, D 는 막대의 지름(ft)이다. 공기에 노출된 막대의 끝에서의 열전달 계수는 다음과 같이 주어진다.

$$h_e = 0.18 |\Delta T|^{1/3} \quad (6.35)$$

여기서 사용된 단위는 식 (6.34)에서와 같다. 막대 표면으로부터의 온도 T_∞ 의 주위로의 복사 열전달은 유효 방사도 ϵ 을 사용하는 Stefan-Boltzmann 식으로 기술된다.

$$q_{\text{rad}} = \epsilon \sigma A (T - T_\infty)^4 \quad (6.36)$$

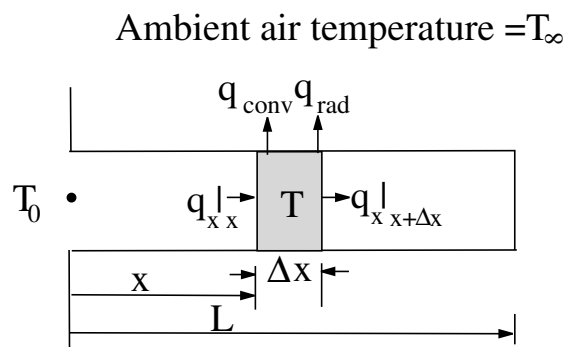


그림 6.11: 수평 원통으로의 열전달에 대한 미분 요소

여기서 $\sigma = 0.1714 \times 10^{-8} \text{btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{R}$ 이고, A 는 표면적(ft^2)이다. 보통의 경우에 막대의 지름은 막대의 길이 L 에 비하여 비교적 작고, 반지름 방향으로의 온도의 변화는 작을 것이고, x 방향으로의 온도의 변화는 클 것이다. 따라서 수학적으로는 주위 공기로의 대류 및 복사에 의한 열전달이 있는 1차원 열 전도 문제가 된다.

- (a) 막대의 수평 방향을 따라서 온도 분포를 계산하고, 가열되는 표면으로부터 막대의 모든 표면에서의 대류만에 의하여 제거되는 열전달 속도를 구하라. 벽면의 온도는 $T_0 = 275^\circ\text{F}$, 주위 온도는 $T_\infty = 70^\circ\text{F}$, 막대의 지름은 $D = 0.1\text{ft}$, 막대의 길이는 $L = 0.5\text{ft}$ 이고 막대의 열 전도도는 $k = 30\text{btu/h} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F}$ 이다.
- (b) 막대의 노출된 끝 부분에서의 대류가 없다는 가정하에 (a)를 다시 풀라.
- (c) 만약 유효 방사능이 $\epsilon = 0.85$ 인 막대 표면으로부터의 복사가 대류에 포함된 경우에 (a)를 다시 풀라.
- (d) (b)의 경계조건에 관한 가정과 (c)의 복사를 대류에 포함시킨 것에 대하여 어떤 결론을 내릴 수 있는가?
- (e) $T_0 = 575^\circ\text{F}$ 인 경우에 (a)에서 (d)를 다시 풀라.

추가적인 정보 및 데이터

열전달에 대한 모델링 방정식 막대에서의 온도를 기술하는 미분 방정식은 그림 6-11에 그려진 미분 요소에 대한 에너지 수지식으로부터 얻어진다.

입력 + 생성 = 출력 + 축적

$$q_x|_x + 0 = q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}} + q_x|_{x+\Delta x} + 0 \quad (6.37)$$

막대 내부에는 Fourier의 법칙(식 (6.1))이 적용되고 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dT}{dx} = (-Q_x)/k \quad (6.38)$$

다.

$$Q_x \left(\frac{(\pi D^2)}{4} \right) \Big|_x = h(\pi D \Delta x)(T - T_\infty) + \epsilon \sigma (\pi D \Delta x)(T - T_\infty)^4 + Q_x \left(\frac{(\pi D^2)}{4} \right) \Big|_{x+\Delta x} \quad (6.39)$$

앞의 식에 $\Delta x \rightarrow 0$ 의 극한을 취하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{dQ_x}{dx} = - \left(\frac{4}{D} \right) [h_s(T - T_\infty) + \epsilon \sigma (T - T_{inf})^4] \quad (6.40)$$

막대의 끝에서의 경계조건은 면적이 $A = \pi D^2/4$ 인 표면에 대한 정상상태 에너지 수지식으로부터 결정된다.

입력 + 생성 = 출력 + 축적

$$q_x|_{x=L} + 0 = q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}} + 0 \quad (6.41)$$

식 (6.41)의 여러 항에 해당되는 표현을 대입하고, 열속에 대하여 풀면 다음과 같이 된다.

$$Q_x|_{x=L} = [h(T - T_\infty) + \epsilon \sigma (T - T_\infty)^4] \Big|_{x=L} \quad (6.42)$$

막대에서 열전달 속도에 관한 방정식 대류와 복사에 의한 막대로부터의 총 열전달 속도는 $x = 0$ 인 기저에서 막대로의 전도에 의한 열전달 속도와 같다. 이 속도는 다음과 같이 주어지고,

$$q_x|_{x=0} = -k \left(\frac{(\pi D^2)}{4} \right) \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} \quad (6.43)$$

식 (6.38)에 대한 수치가 얻어지면 계산될 수 있다.

6.4 해(제안)

수치해는 식 (6.38)과 (6.40)의 동시 적분이 요구된다. 문제 3.6에서 개괄한 사격법은 $(dQ_x)/dx|_{x=0}$ 에 대한 초기조건을 수렴시키는데 사용되고, Q_x 에 대한 원하는 최종 조건이 얻어진다. 이에 해당하는, 0으로 수렴해야할 최종 조건에 대한 목적함수는 식 (6.42)로부터 다음과 같이 쓰여진다.

$$\text{err} = Q_x|_{x=L} - [h_e(T - T_\infty) + \epsilon \sigma (T - T_\infty)^4] \Big|_{x=L} \quad (6.44)$$

막대로의 열전달 속도는 식 (6.43)으로부터 얻을 수 있다. 열전달의 여러 유형은 방정식들에 있는 항들을 조정하여 모델링되고, 경계조건들도 비슷하게 수정된다.

제 7 절 삼각형 방열판으로부터의 열전달

7.1 개념 설명

표면으로부터의 대류가 있는 삼각형 방열판에서 전도에 의한 1차원 열전달

7.2 사용된 수치해법

사격법을 사용하는 연립 상미분 방정식의 두점 경계치 문제의 해법

7.3 문제 설명

삼각형 방열판은 소량의 방열판 재료를 사용하여 열전달 속도를 증가시키기 위하여 널리 사용된다. 이와 같은 방열판은 그림 6.12에 주어져 있다. 이와 같은 방열판을 간략히 해석하기 위하여 온도 T 가 x 에 대해서만 변하며, 방열판의 양끝으로 부터의 열손실은 없고, 열전달 계수가 일정한 단순 대류가 방열판 표면으로부터의 대류를 기술한다는 가정들을 이용한다.

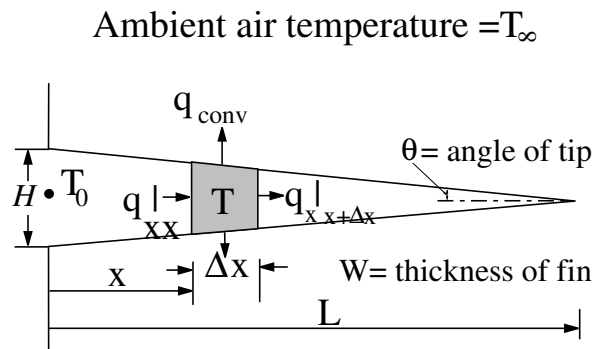


그림 6.12: 삼각형 방열판에서의 열전달에 대한 미분 요소

따라서 그림 6.12에 보이는 미분 부피에 대한 에너지 수지식은 다음과 같이 된다.

$$\text{입력} + \text{생성} = \text{출력} + \text{축적}$$

$$q_x|_x + 0 = q_{conv} + q_x|_{x+\Delta x} + 0 \quad (6.45)$$

방열판의 윗면과 밑면으로부터의 대류 열전달은 다음과 같게 된다.

$$q_{\text{conv}} = 2W \Delta x \sec \theta h_s (T - T_\infty) \quad (6.46)$$

여기서 H 는 방열판의 높이이고, θ 는 방열판의 끝에서의 각도로 기울기는 $W/2L$. 정의와 단위는 문제 6.6에서 주어진 것과 같다. 식 (6.45)를 Δx 로 나누고, 도함수의 정의를 이용하여 정리하면, 다음과 같은 미분 방정식이 얻어진다.

$$\frac{dq}{dx} = -2W \sec \theta h_s (T - T_\infty) \quad (6.47)$$

방열판에서의 열 전도에 대한 Fourier 법칙은 다음과 같이 쓰여진다.

$$q = -kA \frac{dT}{dx} \quad (6.48)$$

여기서 A 로 주어지는 단면적은 x 의 함수로 다음과 같이 주어진다.

$$A = \left(1 - \frac{x}{L}\right) H \quad (6.49)$$

따라서 식 (6.48)은 A 에 대한 식 (6.49)를 사용하여 다음과 같이 쓰여진다.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{q}{-k \left(1 - \frac{x}{L}\right) H} \quad (6.50)$$

식 (6.47)에 대한 최종조건은 $q|_{x=L} = 0$ 이고, 식 (6.50)에 대한 초기조건은 $T|_{x=0} = T_0$ 이다.

제 8 절 관측에 대류 열전달이 있는 경우의 단일 경로 열 교환기

8.1 개념 설명

구동력이 평균 온도, log 평균 온도, 국지 온도인 경우의 단순 열 교환기, 물성이 온도에 따라 변하는 난류 흐름을 포함하는 열전달, 총괄 및 미분 에너지 수지식의 단순 열 교환기로의 적용.

8.2 사용된 수치해법

비선형 방정식과 상미분 방정식의 해법

8.3 문제 설명

단순 열 교환기는 안쪽 지름이 $D = 0.01033\text{m}$ 이고 상당길이가 $L = 8\text{m}$ 인 단일 관으로 이루어진다. 이 열 교환기에서 $m = 1\text{kg/s}$ 의 경질 탄화수소가 $T_S = 170^\circ\text{C}$ 에서 응축되는 수증기에 의하여 가열된다. 수증기에서 관으로의 열전달 계수와 관 벽의 열 전도도가 아주 크기 때문에 관의 내벽에서의 온도는 수증기의 온도로 가정된다. 탄화 수소의 점도($\text{kg/m}\cdot\text{s}$)는 온도에 따라서 크게 변하며 다음과 같이 주어진다.

$$\mu = \exp[-12.86 + 1436/(T - 153)] \quad (6.51)$$

여기서 T 는 온도(K)이다. 다른 물성들은 온도에 대하여 상수이며 $\rho = 850\text{kg/m}^3$, $C_p = 2000\text{J/kg}\cdot\text{K}$, $k = 0.140\text{W/m}\cdot\text{K}$ 로 주어진다. 탄화 수소의 입력 온도는 $T_1 = 40^\circ\text{C}$ 이다.

부가적인 정보 및 데이터

총괄 열전달 계수를 사용하는 국지 또는 점(point) 에너지 수지는 다음과 같이 표현된다(Geankoplis [1] 참조).

$$q = h_i A \Delta T \quad (6.52)$$

여기서 h_i 는 관의 내부 면적에 기준하는 열전달 계수($\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$)이고 내부 면적(m^2)은 A 이다.

관측 유체에 대한 총괄 에너지 수지는 다음과 같게 된다.

$$q_T = m C_p (T_2 - T_1) \quad (6.53)$$

여기서 q_T 는 총 에너지 전달 속도이고, $(T_2 - T_1)$ 은 열 교환기를 통과하면서 증가되는 온도를 나타낸다.

평균 온도 구동력 열 교환기의 길이에 따라 구동력이 크게 변하지 않을 때, 입구와 출구에서의 평균 온도차가 식 (6.52)에 사용될 수 있다.

$$\Delta T = \Delta T_m = [(T'_1 - T_1) + (T'_2 - T_2)] / 2 \quad (6.54)$$

그림 6.13의 일반적인 병류 흐름의 경우에서 처럼 여기서 하첨자 1은 관 입구 위치를, 하첨자 2는 관 출구의 위치를 나타낸다. Prime(')은 이 문제에서는 수증기의 온도 T_S 로 일정한 고온부를 나타낸다.

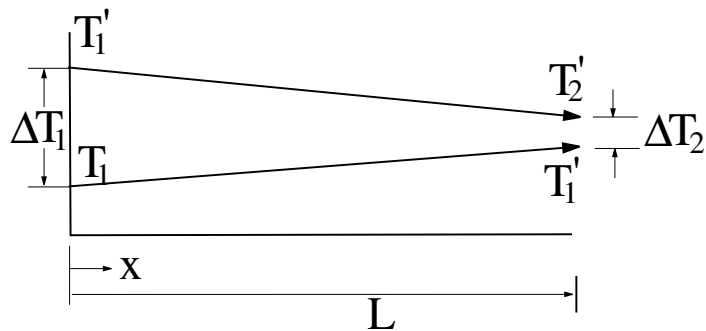


그림 6.13: 단일 경로 병류 열 교환기에 대한 일반적인 온도 분포

Log 평균 온도 구동력 열 교환기의 길이에 따라 구동력이 현저하게 변할 경우, 입구와 출구에서의 온도의 log 평균이 식 (6.52)에 사용되어야 한다.

$$\Delta T = \Delta T_{lm} = \frac{[(T'_1 - T_1) - (T'_2 - T_2)]}{\ln[(T'_1 - T_1)/(T'_2 - T_2)]} \quad (6.55)$$

국지 온도 구동력 그림 6.14에 보이는 바와 같이 입구에서 x 만큼 떨어진 곳에 위치한 점에서의 미분 에너지 수지를 작성할 수 있다. 관의 미분 요소에 대한 정상상태 에너지 수지는 다음과 같게 된다.

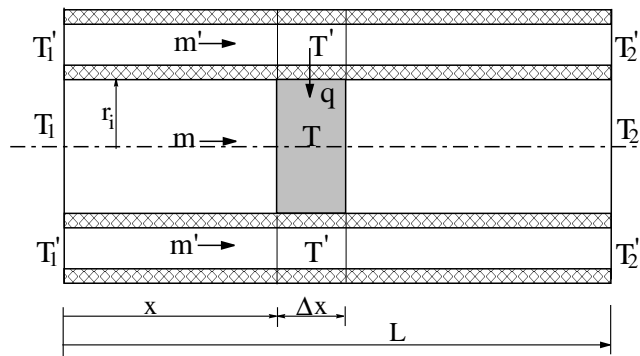


그림 6.14: 단일 경로 병류 열 교환기에서 에너지 수지를 위한 미분 요소

$$\text{입력} + \text{생성} = \text{출력} + \text{축적}$$

$$mC_p T|_x + q + 0 = mC_p T|_{x+\Delta x} + 0 \quad (6.56)$$

여기서 m 은 관에서의 질량 흐름 속도(kg/s)이다. 고온부로부터 관측으로의 입력을 나타내는 q 항은 식 (6.52)와 열전달에 대한 미분 면적을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$q = h_i(2\pi r_i \Delta x)(T' - T) \quad (6.57)$$

Δx 를 0으로 보내는 극한을 취하고 정리하면 다음과 같은 미분 방정식이 얻어진다.

$$\frac{d}{dx}(mC_p T) = h_i(2\pi r_i)(T' - T) \quad (6.58)$$

m 과 C_p 가 일정한 경우에 미분 에너지 수지는 다음과 같이 간략화 된다.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{h_i(2\pi r_i)(T' - T)}{mC_p} \quad (6.59)$$

이 미분 방정식은 열 교환기의 관측 유체의 온도를 열 교환기의 길이의 함수로 예측하는데 사용될 수 있다. 초기조건은 $x = 0$ 에서 $T = T_1$ 이다. 이 방정식을 $x = L$ 까지 적분하면 관의 출구에서 유체의 온도를 얻을 수 있다.

8.4 (부분) 해

(a)와 (b) 이 열 교환기를 정상상태에서 조업하는 동안에 (통측의) 수증기로부터 전달된 총 열량은 식 (6.52)를 사용하여 계산할 수 있다. $q = q_T$ 는 식 (6.53)에 의하여 주어지는 (관측의) 경질 탄화수소로 전달된 열량과 같아야 한다. 따라서 이 두 식에서 q_T 를 소거하면 출구온도 T_2 에 대한 다음과 같은 비선형 방정식이 얻어진다.

$$h_i A \Delta T = m C_p (T_2 - T_1) \quad (6.60)$$

앞의 방정식에서 면적 항은 $A = 2\pi r_i L$ 로 주어지는 관의 내부 표면적이다. 전달된 총 열량은 식 (6.53)으로부터 계산된다. Log 평균 온도 구동력이 사용됨에 주의하라. Log 항을 곱해서 비선형 방정식을 다음과 같이 정리하는 것이 편리하다.

$$h_i [(T'_1 - T_1) - (T'_2 - T_2)] = m C_p (T_2 - T_1) \ln[(T'_1 - T_1)/(T'_2 - T_2)] \quad (6.61)$$

제 9 절 이중관 열 교환기

9.1 개념 설명

물성과 열전달 계수들이 위치에 따라 변하는 경우에 미분 에너지 수지식을 사용한 병류 및 향류 열 교환기 계산

9.2 사용된 수치해법

이미 알려진 초기 조건(병류의 경우) 또는 쪼개진 경계조건(향류의 경우)을 사용하여 결합된 1계 상미분 방정식들의 해

9.3 문제 설명

그림 6.15에 그려진 이중관 열 교환기 조업의 한 형태는 입구온도 T_1 으로 들어와서 출구온도 T_2 로 나가는 $m'/lb_m/h$ 의 정상상태 흐름을 냉각시키는 것이다. 통측의 유체는 mlb_m/hr 의 유속으로 입구온도 T'_1 에서 T'_2 으로 가열된다.

표 6.3에 주어진 유체중의 하나를 택하여 이중관 열 교환기에서 물에 의하여 냉각된다고 하자. 냉각수의 유속은 항상 액체의 경우에는 액체의 유속의 300% 즉 3배이고, 기체인 경우에는 기체의 유속의 30배이다. 냉각수는 $65^\circ F$ 에서 연속적으로 이용가능하다. 통과 관측의 국지 대류 열전달 계수는 다음과 같이 주어지는 Dittus-Boelter 상관식[?]으로 계산된다.

$$Nu = 0.023Re^{0.8}Pr^n \quad (6.62)$$

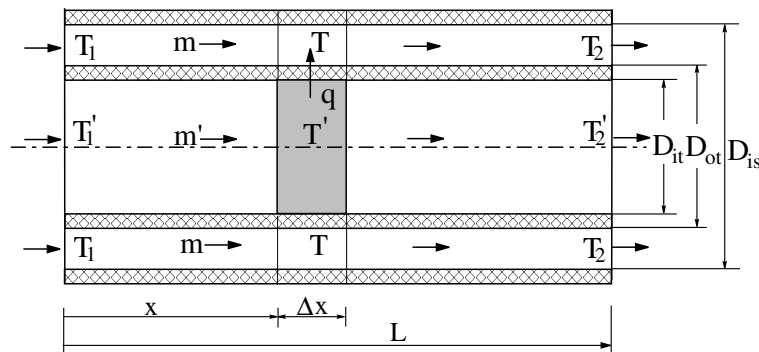


그림 6.15: 병류 흐름에 대한 이중관 열 교환기

또는

$$\frac{hD}{k} = 0.023 \left(\frac{Dv\rho}{\mu} \right)^{0.8} \left(\frac{C_p\mu}{k} \right)^n \quad (6.63)$$

여기서 가열되는 경우에는 $n = 0.4$, 냉각되는 경우에는 $n = 0.3$ 이다. 다양한 항들이 문제 2.5에서 논의되었다. Re 의 $v\rho$ 항은 질량속 또는 질량 속도로 통상적으로 표현되고, $v\rho = m/A_c$ 이며 m 은 질량 유속, A_c 는 흐름에 대한 단면적을 나타낸다.

열 교환기의 중심관은 열 전도도가 220btu/ft·h·°F로 일정한 구리로 되어 있으며, 강철로 된 통의 외부는 단열이 아주 잘 되어 있다. 관석의 형성은 문제가 되지 않는다. 여러 온도에서의 서로 다른 유체의 물성들은 부록 E의 표 E-2와 E-3에 주어져 있다.

표 6.3에서 유체를 선택하고 모든 문제들에 대하여 적용하라.

- (a) 선택된 유체가 열 교환기의 관측에서, 냉각수가 통측에서 병류로 흐를 때 원하는 출구 온도에 도달하는데 필요한 거리를 계산하라.
- (b) 선택된 유체가 열 교환기의 관측에서, 냉각수가 통측에서 향류로 흐를 때 거리를 계산하라.
- (c) 냉각수가 열 교환기의 관측에서, 선택된 유체가 통측에서 병류로 흐를 때 거리를 계산하라.
- (d) 냉각수가 열 교환기의 관측에서, 선택된 유체가 통측에서 향류로 흐를 때 거리를 계산하라.

표 6.3: 다양한 유체들에 대한 열 교환기 조업 데이터

Sulfur Dioxide (gas)	35	300	90	3/4	14	$1\frac{1}{4}$	80
----------------------	----	-----	----	-----	----	----------------	----

부가적인 정보 및 데이터

열 교환기는 그림 6.15에서 보는바와 같은 관측과 통측의 흐름 방향이 같은 병류 또는 통측의 유체의 흐름 방향이 관측 유체의 흐름 방향과 반대인 향류로 조업될 수 있다.

병류 병류 흐름에서 관측 유체에 대한 미분 에너지 수지는 문제 6.8에서 자세히 언급된 것과 비슷하게, prime은 고온 또는 고온 유체의 물성을 의미하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{d}{dx}(T') = -\frac{U_i(\pi D_i)(T' - T)}{m'C'_p} \quad (6.64)$$

여기서 총괄 열전달 계수(btu/hft² °F)는 관의 관의 안쪽 지름(ft)이 D_i 인 경우에 πD_i 로 주어지는 내부 면적에 근거한다. 식 (6.64)에 대한 초기조건은 관에 대해서는 입구 온도 T'_1 이고 최종 조건은 관으로부터의 출구 온도 T'_2 이다. 비슷하게 잘 단열된 통측에 대해서, 병류 흐름에서 통측 유체와 내부 열전달 면적에 대한 미분 에너지 수지는 다음과 같게 된다.

$$\frac{d}{dx}(T) = -\frac{U_i(\pi D_i)(T' - T)}{mC_p} \quad (6.65)$$

여기서 통측의 대류 열전달 계수는 내부 관의 외부 지름(ft) D_i 에 근거한다. 통측의 입구 및 출구 조건은 각각 T_1 과 T_2 이다. 그림 6.13은 이러한 표기법을 사용하는 경우에 일반적인 병류 흐름의 온도 분포를 보여준다.

총괄 열전달 계수 내부 면적에 근거한 국지 총괄 열전달 계수는 다음과 같은 식에 의하여 계산된다(Geanakoplis [1]).

$$U_i = \frac{1}{1/h_i + ((r_{ot} - r_{it})D_i t)/(k_t D_{t\ln}) + D_{it}/(D_{ot} h_o)} \quad (6.66)$$

여기서 t 는 관 벽과 재료와 제원을 나타낸다. $D_{t\ln}$ 은 관벽에 대한 log 평균 지름(또는 면적)을 나타낸다.

통측에서의 열전달 통 원환(annulus)에 있는 유체에 대한 열전달 계수는 외부 지름에서 내부 지름을 뺀 상당 지름을 사용하여 계산된다. 이 상당 지름은 열전달 상관식에서 Reynolds 수와 Nusselt 수를 계산하는데 사용된다.

향류 흐름 향류 흐름에서 관측 유체에 대한 미분 에너지 수지는 식 (6.64)와 동일하다. 하지만 통측에서는 유체의 흐름 방향이 반대가 되므로 미분 에너지 수직식은 다음과 같게 된다.

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{U_i(\pi D_i)(T' - T)}{(mC_p)} \quad (6.67)$$

위식은 병류 흐름에 대한 식에 -1을 곱한 것과 같다. 하지만, 초기조건은 통측의 출구 온도 T_1 이 되고 최종조건은 통측의 입력 온도 T_2 가 된다. 이러한 경우에 식 (6.64)와 (6.67)의 연립 방정식은 쪼개진 경계 문제가 된다. 이 문제를 풀기 위해서는 통측의 출구 온도 T_1 을 가정하고 적분을 진행하여 원하는 열 교환기 길이에서 입구 온도 T_2 를 결정해야 한다. 2점 경계치 문제의 해법은 문제 3.6에 논의하였다.

9.4 해 (제안들)

물과 선택된 다른 유체들의 물성들은 부록 E에서 찾을 수 있다. 이 물성들은 문제 2.3과 5.5에서 제안된 기법을 적용하여 온도 °F의 함수로 나타낼 수 있다.



서로 다른 유체에 대한 MATLAB 데이터 파일은 TABLE 디렉토리의 e02.mat으로 주어져 있다.

제 10 절 단열이 안된 탱크에서 대류에 의한 열 손실

10.1 개념 설명

주위로 대류에 의하여 열이 손실되는 단열이 안된 잘 혼합된 탱크의 온도 계산

10.2 사용된 수치해법

비선형 대수 방정식과 양함수적 대수 방정식들의 해법

10.3 문제 설명

냉각수가 $Q = 0.5\text{m}^3/\text{h}$ 의 속도로 $T = 80^\circ\text{C}$ 의 온도로 배출된다. 물은 지름이 $D = 1\text{m}$ 이고 높이가 $H = 2\text{m}$ 인 원통형 탱크로 모여진다. 탱크의 내용물은 잘 혼합되고 주위 공기로의 열 손실은 모두 자연 대류에 의한 것이라고 가정될 수 있다. 물은 들어오는 속도와 같은 속도로 탱크 밖으로 배출된다. 탱크 외벽의 온도는 탱크의 온도와 같다고 볼 수 있고, 탱크의 하부는 아주 잘 단열되어 있다. 대기압 하에서 여러 온도에 대한 공기의 물성들은 부록 E의 표 E.1에 주어져 있다.

여기서

$$Nu = \frac{hL}{k} \quad (\text{Nusselt no.})$$

$$Ra = GrPr \quad (\text{Rayleigh no.})$$

$$Gr = \frac{\beta g \rho^2 L^3 \Delta T}{\mu^2} \quad (\text{Grashof no.})$$

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k} \quad (\text{Prandtl no.})$$

이다. 앞의 식에서, h 는 열전달 계수($\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$), L 은 특성 길이(m), k 는 공기의 열 전도도($\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$), β 는 공기의 열 팽창 계수($1/\text{K}$), g 는 $9.80665\text{m}/\text{s}^2$ 으로 주어지는 중력 가속도, ρ 는 공기의 밀도(kg/m^3), ΔT 는 탱크 벽과 공기 사이의 온도차의 양의 값(K), μ 는 공기의 점도($\text{kg}/\text{m} \cdot \text{s}$), C_p 는 공기의 열용량($\text{J}/\text{kg} \cdot \text{K}$)이다. 이 문제에서는 지름의 D 인 윗면의 면적과 사각형인 옆면의 면적이 같으므로 $L = 0.8862D$ 이다.

넓은 범위의 Ra 의 걸친 자연대류에 대한 다음과 같은 Churchill과 Chu의 상관식이 원통형 탱크의 수직면에 대하여 사용될 수 있다 [?].

$$Nu = \left(0.825 + \frac{0.387Ra^{1/6}}{[1 + (0.492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right)^2 \quad (6.69)$$

식 (6.68)과 (6.69)에서 공기의 물성은 다음과 같은 경막온도 T_f 에서 계산되어야 한다.

$$T_f = \frac{T + T_{\text{air}}}{2} \quad (6.70)$$

강제 대류 강제 대류에 대한 열전달 계수는 원통의 윗면과 수직면에 대하여 다음과 같은 식을 사용하여 근사된다.

$$Nu = 0.0336Re_L^{0.8} Pr^{1/3} \quad (6.71)$$

여기서 Reynolds 수는 $Re_L = (Lv\rho)/\mu$ 로 정의된다. 원통 윗면의 원형 평판의 특성 길이는 $L = 0.8862D$ 로 추산되는 반면, 원형 탱크의 옆면으로부터의 대류에서는 $L = D$ 이다. v 는 풍속(m/s)로 정의된다. 식 (6.71)에서 공기의 물성은 식 (6.70)에서 주어지는 경막 온도에서 계산된다.

10.4 해(제안들)

탱크 내용물에 대한 엔탈피 수지식은 다음과 같게 된다.

$$Q\rho_w C_{pw}(80 - T) = h_1 A_1 (T - T_{\text{air}}) + h_2 (T - T_{\text{air}}) \quad (6.72)$$

여기서 ρ_w 는 물의 밀도, C_{pw} 는 물의 열용량, T 는 탱크 출구에서의 온도, h_1 은 수평 열전달 계수, A_1 은 수평 열전달 면적, h_2 은 수직 열전달 계수, A_2 은 수직 열전달 면적이다. 공기의 물성들은 표 E-1에 2장에서 다루었던 기법을 적용하여 온도의 함수로 나타낼 수 있다.

(a) 정체 공기 이 문제의 해는 식 (6.70)을 사용하여 식 (6.68)과 (6.69)에서 계산되는 h_1 과 h_2 의 적절한 값을 사용하여 비선형 방정식인 (6.72)를 풀면 얻을 수 있다.

(b) 바람이 부는 경우 이 경우에 대한 적절한 Reynolds 수를 계산하여 식 (6.71)로부터 h_1 과 h_2 를 구할 수 있다.



공기에 대한 MATLAB 데이터 파일은 TABLE 디렉토리의 e01.mat로 주어져 있다.

제 11 절 얇은 판으로의 비정상상태 복사

11.1 개념 설명

열 전도도가 아주 커서 물체 내부의 온도를 일정하다고 가정할 수 있는 물체로의 복사 열 전달과 온도와 열속의 비정상상태 및 정상상태 거동 결정.

11.2 사용된 수치해법

상미분 방정식의 해법

11.3 문제 설명

어떤 시간 주기 동안 고온 진공로에서 얇은 금속 판이 열 처리될 것이다. 금속판은 $0.5\text{m} \times 0.5\text{m}$ 이고 두께는 0.0015m 이다. 판의 초기 온도는 20°C 이고, 노의 온도는 1000°C 이다. 판은 노 내부에 매달려 있고, 따라서 노벽으로부터의 복사에 의하여 판의 양쪽 면이 급격히 가열된다. 노벽과 판의 표면은 복사에 대하여 흑체로 가정된다.

물성들이 표 6.4에 요약되어 있고 이 물성들은 온도의 변화에 대하여 일정하다고 가정되는 금속 중의 하나를 선택하라.

시간 증분 Δt 동안에 금속 판에 대한 단순 비정상상태 에너지 수지식은 다음과 같게 된다.

표 6.4: 선택된 금속의 물성(Thomas [?]에서 발췌)

Metal	Density	Heat Capacity
	ρ kg/m ³	C_p kJ/kg · K
Copper	8950	0.383
Iron	7870	0.452
Nickel	8900	0.446
Silver	10500	0.234
Stainless Steel	8238	0.468
Steel (1% C)	7801	0.473
Zirconium	6750	0.272

입력 + 생성 = 출력 + 축적

$$\sigma A_p F_{12} (T_F^4 - T^4) \Delta t + 0 = 0 + V_p \rho C_p (T|_{t+\Delta t} - T|_t) \quad (6.73)$$

여기서 σ 는 $5.676 \times 10^{-8} \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ 으로 주어지는 Stefan-Boltzmann 상수이고, A_p 는 판의 양면의 면적(m^2), V_p 는 판의 부피(m^3), F_{12} 는 1로 가정되는 관측인자(view factor), T_F 는 노의 온도(K)이다. Δt 를 0으로 보내는 극한을 취하고 정리하면 식 (6.73)은 다음과 같은 상미분 방정식이 된다.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\sigma A_p F_{12} (T_F^4 - T^4)}{V_p \rho C_p} \quad (6.74)$$

여기서 금속의 물성은 일정하다고 가정한다.

열속(W/m^2) Q 는 다음과 같이 주어진다.

$$Q = \sigma F_{12} (T_F^4 - T^4) \quad (6.75)$$

제 12 절 반 무한 평판에서의 비정상상태 전도

12.1 개념 설명

시간에 따라 변하는 경계조건하에서 물성이 일정한 1차원 반 무한 평판에서의 비정상상태 열 전도

12.2 사용된 수치해법

편미분 방정식을 풀기위한 수치적 직선군 법, 양함수적 대수 방정식과 결합된 연립 상미분 방정식의 해법

12.3 문제 설명

물성이 일정한 경우에 1차원 비정상상태 열 전도는 다음과 같은 편미분 방정식으로 기술된다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (6.76)$$

이 식은 이미 문제 3.9에서 논의되었다. 이와 같은 형태의 열전달의 흥미있는 적용은 Thomas [?]에서 다루어진 여러 깊이에서의 토양의 온도이다. 토양 표면 온도의 연중 변화와 이 온도가 열 전도를 통하여 토양 깊이에 따른 온도에 어떤 영향을 주는지를 고려하자. Thomas에 의하여 $^{\circ}\text{F}$ 로 주어진 어떤 특정한 해에 토양의 표면 온도는 다음과 같다.

$$T_s(t) = T_M - \Delta T_s \cos \left[\frac{2\pi}{\tau} (t - t_0) \right] \quad (6.77)$$

여기서 t 는 연중 날 수, T_M 은 연중 평균 대기온도($^{\circ}\text{F}$), ΔT_s 는 연중 토양 평균 온도의 변화, τ 는 365일인 주기, t_0 는 날 단위의 위상 상수이다. 여러 위치에 따른 매개인자 값들을 얻을 수 있고, 대표적인 값이 표 6.5에 정리되어 있다.

식 (6.73)에 표 6.5에 주어진 데이터를 사용하여 얻은 시카고에 대한 연중($0 \leq t \leq 365$) 토양 평균 온도의 변화가 그림 6.16에 주어져 있다.

표 6.5: 미국내 몇 몇 도시들에 대한 토양 온도 매개인자

City	T_M (°F)	ΔT_s (°F)	t_0 days
Bismarck, ND	44	31	33
Burlington, VT	46	26	37
Chicago, IL	51	25	37
Las Vegas, NV	69	23	32
Phoenix, AZ	73	23	33

(Thomas [?]에서 발췌)

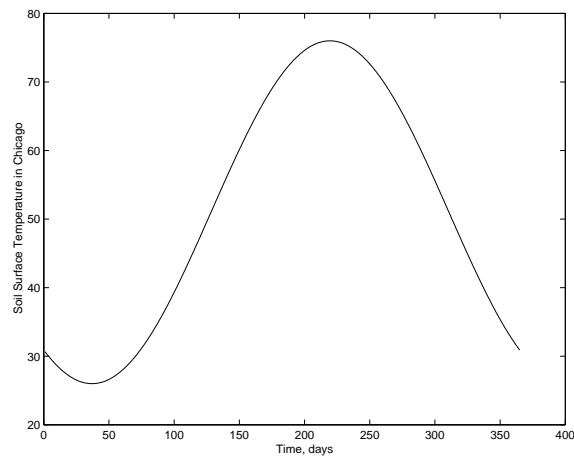


그림 6.16: 시카고의 연중 토양 표면 온도의 변화

표 6.5에 토양 온도 데이터가 주어진 도시중 하나를 택하라. 토양의 열확산 계수는 $\alpha = 0.9\text{ft}^2/\text{day}$ 로 일정하다고 가정하라.

- (a) 식 (6.77)의 표면 온도를 경계조건으로 사용하여 지표면으로부터 다양한 위치에서의 온도에 관한 식 (6.76)을 풀기위하여 수치적 직선군법을 적용하라. 4년에 걸쳐서 8, 16, 24, 72ft에 해당하는 x 에서의 온도를 도시하라. 초기 simulation에서는 8ft의 균일 간격으로 10개의 구간과 11개의 node를 사용하는 것이 충분하다고 제안되었다. 초기조건은 연평균 지구의 온도 T_M 으로 제안되었다.
- (b) (a)에서 사용한 구간 간격이 적절하다는 것을 구간의 수를 두배로 하고 구간 간격을 반으로하여 계산하여서 입증하라. 결과를 (a)의 결과와 비교하라.
- (c) 왜 토양 표면과 지하에서의 온도 사이에는 위상차가 생기는가? 이 효과를 보여주는 그림을 그려라. 그리고 왜 이 문제에 대해서는 수년에 걸친 해가 바람직한가를 보여라.

12.4 해(제안들)

(a) 와 (b) 수치적 직선군법은 문제 3.9에서 논의되었고, 반무한 유체에 대해서는 문제 5.17에서 적용되었다. 이와 같은 문제에서 해를 얻기 위해서는 여러 node수와 구간 간격들에 대한 임시해를 얻어보는 것이 바람직하다. 반 무한 평판에 대하여 이와 같은 임시해를 얻어보는 목적은 (이 경우에는 큰 x 인) 최대 깊이에서 변수가 시간에 대하여 현저하게 변하지 않도록 하는 것이다. 따라서 전체 구간에 대하여 node수를 증가시켜감에 따라 해가 node수에 크게 의존하지 않도록 node수를 조절한다.

MATLAB의 상미분 방정식 해법이 node수와 node간의 간격을 조절하는 과정에 사용될 수 있다. 방정식을 복사하는 능력은 각 node에 대한 유한 차분식을 쓰는데 아주 유용하다. 정확한 해를 얻기위해서는 많은 수의 미분 방정식을 풀어야 하는 경우도 있다.

제 13 절 유한한 수조에서 고체 구의 냉각

13.1 개념 설명

집중계 및 분산계 해석을 통한 열전달 해석. 구내의 비정상 상태 전도에 대한 집중계 및 분산계 모델 수식화와 수조에 대한 집중계 모델 수식화

13.2 사용된 수치해법

수치적 직선군 법에 의한 편미분 방정식의 해와 연립 상미분 방정식의 해

13.3 문제 설명

금속 가공 회사는 여러 금속으로 만든 균일한 지름의 구의 급격한 냉각을 요구한다. 이러한 냉각을 하기 위하여 고온 상태에서 제조된 개별 구를 잘 혼합된 수조에 빠뜨린다. 그림 6.17에 이러한 조작이 간략히 그려져 있다.

13.4 (부분) 해

이 문제는 구가 물로 들어가면서 구가 냉각되는 비정상 상태 문제이다. 만약 구의 열 전도도가 매우 크거나 구의 지름이 작은 경우 또는 이 두가지 조건이 모두 만족되는 경우 구 내의 전도는 매우 빠르게 될 것이다. 수조는 냉각되는 구로부터 전달된 에너지에 의하여 가열된다.

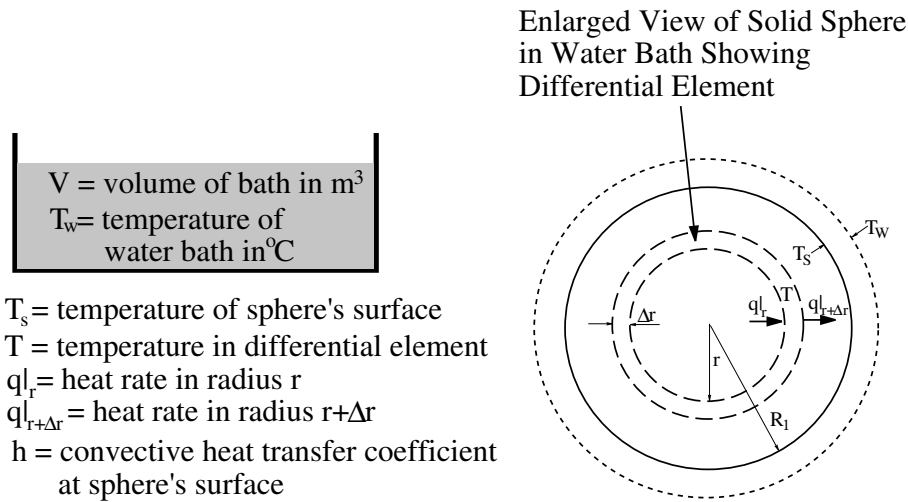


그림 6.17: 수조에서 구형 고체의 냉각

(a) 집중계 해석은 모든 시간에 걸쳐서 구 내의 온도가 일정하다고 가정되는 구 전체에 걸친 일반적인 비정상 상태 에너지 수지식을 세운다. 이 경우에 구로의 열 입력은 없고 구내의 열 발생도 없다. 출력은 수조로의 열전달을 통해 이루어 지고, 축적은 구내의 에너지 변화와 연관되어 있다. 따라서 Δt 에 걸친 비정상 상태 수지식은 다음과 같이 된다.

$$\text{입력} + \text{생성} = \text{출력} + \text{축적}$$

$$0 + 0 = h(4\pi R_1^2)(T - T_W)\Delta t + \left(\frac{4\pi R_1^3}{3}\right)\rho C_p(T|_{t+\Delta t} - T|_t) \quad (6.78)$$

Δt 를 0으로 보내는 극한을 취한 후 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-h(4\pi R_1^2)(T - T_W)}{\left(\frac{4\pi R_1^3}{3}\right)\rho C_p} = \frac{-3h(T - T_W)}{R_1\rho C_p} \quad (6.79)$$

여기서 초기조건은 $t = 0$ 에서 $T = 300^\circ\text{C}$ 이다. 구로부터의 열손실 속도는 다음과 같이 계산된다.

$$q = h(4\pi R_1^2)(T - T_W) \quad (6.80)$$

이는 식 (6.78)의 출력항에 해당한다.

(b) 구 내에서의 열 전도는 그림 6.17에서 보이는 바와 같이 시간 증분 Δt 동안에 걸쳐서 반지름의 증분 Δr 의 미분 요소에 대한 비정상 상태 에너지 수지식으로 기술된다.

$$\text{입력} + \text{생성} = \text{출력} + \text{축적}$$

$$q|_r \Delta t + 0 = q|_{r+\Delta r} \Delta t + 4\pi r^2 \Delta r \rho C_p (T|_{t+\Delta t} - T|_t) \quad (6.81)$$

Δt 와 Δr 이 0으로 가는 극한을 취하고 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \left(\frac{1}{4\pi r^2 \rho C_p} \right) \frac{\partial q}{\partial r} \quad (6.82)$$

다음과 같이 표현되는 Fourier 법칙을

$$q = -k4\pi r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \quad (6.83)$$

식 (6.82)에 대입하여 다음과 같은 2계 편미분 방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2 \rho C_p} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (6.84)$$

만약 열 전도도 k 가 일정하다면, 앞의 식의 우변에서 k 를 밖으로 빼낼 수 있다.

식 (6.84)의 수치해를 얻는 가장 편한 방법은 문제 3.9에서 논의된 수치적 직선군 법(method of lines)이다. 식 (6.84)의 2계 편미방을 직접 푸는 대신에 식 (6.84)에 이르게한 두 식, 식 (6.82)와 (6.83)을 푸는 것이 편리하다. 이 두 식은 $\partial q/\partial r$ 와 $\partial T/\partial r$ 을 유한차분법으로 근사하고, $\partial T/\partial t$ 에 대한 일련의 도함수를 사용하여 풀려진다. 해법은 그림 6.18에 보이는 바와 같이 10개의 반지름 구간에 대한 11개의 노드를 대상으로하여 설명된다. 부록 A의 식 (A.6)으로 주어지는 2차 중앙 차분식을 사용하여 r 에 대한 1계 도함수들을 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{\partial q_n}{\partial r} = \frac{(q_{n+1} - q_{n-1}))}{2\Delta r} \quad \text{for } (2 \leq n \leq 10) \quad (6.85)$$

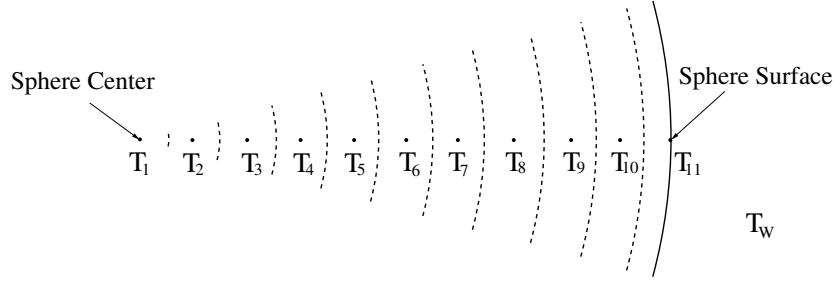


그림 6.18: 수치적 직선군 법을 위한 구 내부의 노드들

$$\frac{\partial T_n}{\partial r} = \frac{(T_{n+1} - T_{n-1})}{2\Delta r} \quad \text{for } (2 \leq n \leq 10) \quad (6.86)$$

따라서 각 내부 노드에서 식 (6.85)를 식 (6.82)에 적용하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\frac{dT_n}{dt} = -\frac{1}{4\pi r_n^2 \rho C_p} \left(\frac{q_{n+1} - q_{n-1}}{2\Delta r} \right) \quad \text{for } (2 \leq n \leq 10) \quad (6.87)$$

식 (6.83)의 Fourier 법칙은 식 (6.86)을 각 내부 노드에 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$q_n = -k4\pi r_n^2 \left(\frac{T_{n+1} - T_{n-1}}{2\Delta r} \right) \quad \text{for } (2 \leq n \leq 10) \quad (6.88)$$

앞의 식에서 임의로 11개의 노드를 사용하는 것은 $\Delta r = R_1/10$ 이고 특정 노드에서의 반지름은 $r_n = 0.1R_1(n-1)$ 으로 주어진다 것을 의미한다.

구의 표면에서의 경계조건 구의 표면에서의 r 방향의 에너지 수지식은 구 내부에서 전도에 의한 표면으로의 열전달 속도는 대류에 의하여 구 표면에서 수조로의 열전달 속도와 같다는 것을 나타낸다.

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_1} = h(T_{11} - T_W) \quad (6.89)$$

식 (A.7)로 주어지는 2차 후방 유한 차분식이 편도함수 $\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_1}$ 대하여 사용되어 다음과 같은 결과를 준다.

$$-k \left(\frac{3T_{11} - 4T_{10} + T_9}{2\Delta r} \right) = h(T_{11} - T_W) \quad (6.90)$$

식 (6.90)은 T_{11} 에 대하여 다음과 같이 풀려지고,

$$T_{11} = \frac{2\Delta r h T_W - 4kT_{10} + kT_9}{2\Delta r h - 3k} \quad (6.91)$$

이에 해당하는 열전달 속도는 11번째 노드에서 다음과 같이 주어진다.

$$q_{11} = h(4\pi R_1^2)(T_{11} - T_W) \quad (6.92)$$

구의 중심에서의 경계조건 구의 중심에서 열전달 속도는 0이고, 따라서

$$q|_{r=0} = q_1 = 0 \quad (6.93)$$

이고, Fourier 법칙으로부터 다음 관계가 성립한다.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (6.94)$$

부록 A의 식(A.5)에서 주어지는 2차 전방 차분식을 앞의 식에 적용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있고,

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = \frac{(-T_3 + 4T_2 - 3T_1)}{2\Delta r} \quad (6.95)$$

임의의 시간에서의 T_1 은 다음과 같이 결정될 수 있다.

$$T_1 = \frac{4T_2 - T_3}{3} \quad (6.96)$$

수치해 수치해를 얻기 위해서는 식 (6.91)과 (6.92)로 주어지는 구 표면에서의 경계조건과 식 (6.93)과 (6.96)으로 주어지는 구 중심에서의 경계조건을 만족하는 식 (6.87)과 (6.88)를 동시에 수치적으로 풀어야 한다. 초기에 구 전체에서의 온도는 300°C 이고, 구로부터의 출력 열전달 속도는 q_{11} 으로 주어진다.

(c) 가열되는 수조에 대한 기술은 탱크내의 잘 혼합된 물에 대한 비정상상태 에너지 수지를 요구한다. 탱크는 단열되었다고 가정되고, 열전달은 냉각 되는 구로부터만 일어난다. 따라서 Δt 의 시간 간격에서 비정상상태 수지식은 다음과 같게 된다.

$$\text{입력} + \text{생성} = \text{출력} + \text{축적}$$

$$q_{11} + 0 = 0 + V\rho_W C_p W (T_W|_{t+\Delta t} - T_W|_t) \quad (6.97)$$

여기서 식 (6.92)로 계산되는 q_{11} 은 구의 외부 표면에서 수조로의 열전달 속도이다. Δt 를 0으로 보내는 극한을 취하고 정리하면, 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\frac{dT_W}{dt} = \frac{q_{11}}{V\rho_W C_p W} \quad (6.98)$$

여기서 초기조건은 시간 $t = 0$ 에서 $T_W = 20^\circ\text{C}$ 이다. 따라서 수치해는 식 (6.98)과 초기조건을 (b)에서 사용된 방정식 묶음에 더해서 얻어진다.

제 14 절 2차원 비정상상태 전도

14.1 개념 설명

열 확산계수가 일정하고 경계면의 온도가 알려진 경우의 2차원 비정상상태 열 전도

14.2 사용된 수치해법

2차원 편미분 방정식을 풀기 위한 치적 직선군 법의 응용

14.3 문제 설명

x, y 방향으로의 비정상 상태 열 전도는 다음과 같은 편미분 방정식으로 기술된다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (6.99)$$

여기서 T 는 온도(K), t 는 시간(s), α 는 $k/\rho c_p$ 로 주어지는 열 확산계수(m^2/s)이다. 열 전도도 k (W/m), 밀도 ρ (kg/m^3), 열용량 c_p (J/kg)은 일정하다고 여겨진다. 속이 빈 사각형 방의 안쪽 벽이 700K, 바깥쪽 벽은 300K로 유지된다. 그림 6.19에 보이는 바와 같이 안쪽 벽은 $1\text{m} \times 1\text{m}$, 바깥쪽 벽은 $2\text{m} \times 2\text{m}$ 이다. 이 방의 대칭부를 유한 차분법으로 다루기 위한 grid 간격 역시 그림 6.19에 나타나 있다. 그림에서 $\Delta x = \Delta y = 0.125\text{m}$ 이다. 방의 단면을 나타내기 위해서는 8면이 필요하다는 것에 주의하라.

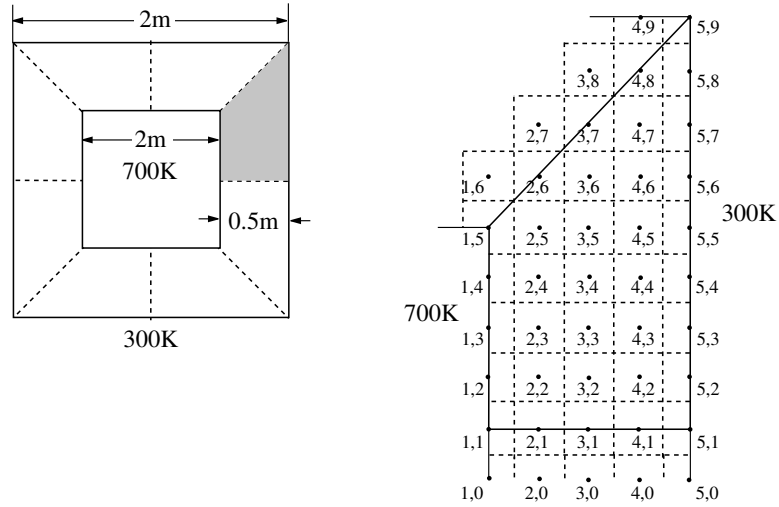


그림 6.19: 속이 빈 정방형 방에 대한 grid 유형.

로 대체되고, 두 공간 도함수들은 유한차분 근사에 의하여 쓰여진다. 그림 6.19에서 보여지는 grid 간격에서 내부 node에 대하여 중앙차분식[부록A의 식 (A-3)]을 사용하여 식 (6.99)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{dT_{n,m}}{dt} = \alpha \left[\frac{(T_{n+1,m} - 2T_{n,m} + T_{n-1,m})}{(\Delta x)^2} + \frac{(T_{n,m+1} - 2T_{n,m} + T_{n,m-1})}{(\Delta y)^2} \right] \quad (6.100)$$

여기서 n 은 x 방향으로의 노드, m 은 y 방향의 노드를 나타낸다 (Geankoplis [1] 참조).

이 문제의 대칭성 때문에, 다음과 같은 온도 관계는 시간에 상관없이 항상 성립하고,

$$\begin{aligned} T_{1,6} = T_{2,5} \quad T_{2,7} = T_{3,6} \quad T_{3,7} = T_{4,7} \\ T_{2,2} = T_{2,0} \quad T_{3,2} = T_{3,0} \quad T_{4,2} = T_{4,0} \end{aligned} \quad (6.101)$$

식 (6.100)에서 주요 grid 경계내의 점들에 한하여 계산을 하는데 사용될 수 있다.

14.4 (부분) 해

(a) 경계조건 및 식 (6.101)에 의하여 주어지는 대칭관계를 이용하면 내부 노드에 대한 방정식은 21개의 연립 상미분 방정식이 된다. 이 문제를 풀기위한 MATLAB 스크립트는 다음과 같이 주어진다.

p614a.m

```

clear all
t0=0;
tf=3000;
alpha=5e-5;
dx=0.25;
dy=0.25;
T210=300;
T310=300;
T410=300;
T220=300;
T320=300;
T420=300;
T230=300;
T330=300;
T430=300;
T240=300;
T340=300;
T440=300;
T250=300;
T350=300;
T450=300;
T260=300;
T360=300;
T460=300;
T370=300;
T470=300;
T480=300;
[t,T]=ode45('p614f',[t0 tf],[T210 T310 T410 T220 T320 T420 T230 T330 T430 T240 ...
  T340 T440 T250 T350 T450 T260 T360 T460 T370 T470 T480]);
T22=T(:,4);
T32=T(:,5);
T43=T(:,9);
plot(t,T22,t,T32,'--',t,T43,'-.');
xlabel('t'); ylabel('T');
axis([0 3000 300 700]);

```

p614f.m

```

function dTdt=p614f(t,T)
dTdt=zeros(21,1);
alpha=5e-5;
dx=0.25;
dy=0.25;
T21=T(1);
T31=T(2);

```

```

T41=T(3);
T22=T(4);
T32=T(5);
T42=T(6);
T23=T(7);
T33=T(8);
T43=T(9);
T24=T(10);
T34=T(11);
T44=T(12);
T25=T(13);
T35=T(14);
T45=T(15);
T26=T(16);
T36=T(17);
T46=T(18);
T37=T(19);
T47=T(20);
T48=T(21);
dTdt(1)=alpha*((T31-2*T21+700)/dx^2+(T22-2*T21+T22)/dy^2);
dTdt(2)=alpha*((T41-2*T31+T21)/dx^2+(T32-2*T31+T32)/dy^2);
dTdt(3)=alpha*((300-2*T41+T31)/dx^2+(T42-2*T41+T42)/dy^2);
dTdt(4)=alpha*((T32-2*T22+700)/dx^2+(T23-2*T22+T21)/dy^2);
dTdt(5)=alpha*((T42-2*T32+T22)/dx^2+(T33-2*T32+T31)/dy^2);
dTdt(6)=alpha*((300-2*T42+T32)/dx^2+(T43-2*T42+T41)/dy^2);
dTdt(7)=alpha*((T33-2*T23+700)/dx^2+(T24-2*T23+T22)/dy^2);
dTdt(8)=alpha*((T43-2*T33+T23)/dx^2+(T34-2*T33+T32)/dy^2);
dTdt(9)=alpha*((300-2*T43+T33)/dx^2+(T44-2*T43+T42)/dy^2);
dTdt(10)=alpha*((T34-2*T24+700)/dx^2+(T25-2*T24+T23)/dy^2);
dTdt(11)=alpha*((T44-2*T34+T24)/dx^2+(T35-2*T34+T33)/dy^2);
dTdt(12)=alpha*((300-2*T44+T34)/dx^2+(T45-2*T44+T43)/dy^2);
dTdt(13)=alpha*((T35-2*T25+700)/dx^2+(T26-2*T25+T24)/dy^2);
dTdt(14)=alpha*((T45-2*T35+T25)/dx^2+(T36-2*T35+T34)/dy^2);
dTdt(15)=alpha*((300-2*T45+T35)/dx^2+(T46-2*T45+T44)/dy^2);
dTdt(16)=alpha*((T36-2*T26+T25)/dx^2+(T36-2*T26+T25)/dy^2);
dTdt(17)=alpha*((T46-2*T36+T26)/dx^2+(T37-2*T36+T35)/dy^2);
dTdt(18)=alpha*((300-2*T46+T36)/dx^2+(T47-2*T46+T45)/dy^2);
dTdt(19)=alpha*((T47-2*T37+T36)/dx^2+(T47-2*T37+T36)/dy^2);
dTdt(20)=alpha*((300-2*T47+T37)/dx^2+(T48-2*T47+T46)/dy^2);
dTdt(21)=alpha*((300-2*T48+T47)/dx^2+(300-2*T48+T47)/dy^2);

```

(b) 일단 온도 분포가 계산되면, 방의 안쪽 벽에서의 총 열 손실은 여러 노드에서 국지 온도 구배에 의한 열속을 합하여 얻을 수 있다. 다음과 같이 주어지는 Fourier 법칙이

$$q_x = -kA \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=\text{inner surface}} \quad (6.102)$$

적절한 면적 A 와 문제의 전체적인 대칭성을 고려하여 적용된다. 식 (6.102)에서 도함수는 x 방향에 대하여 그 일반적인 표현이 다음과 같이 주어지는 2차 전방 유한차분법을 사용하여 구해진다 [부록 A의 식 (A.5) 참조].

$$\frac{dT_n}{dx} = \frac{-3T_n + 4T_{n+1} - T_{n+2}}{2\Delta x} \quad (6.103)$$

따라서, 내부 면에 대하여 (양의 x 방향으로) 내부 벽면을 통한 총 열속은 다음과 같이 주어진다.

$$q = -8k\Delta x \left[\left(\frac{1}{2}\right) \frac{dT_{1,5}}{\delta x} + \frac{dT_{1,4}}{\delta x} + \frac{dT_{1,3}}{\delta x} + \frac{dT_{1,2}}{\delta x} + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{dT_{1,1}}{\delta x} \right] \quad (6.104)$$

여기서 인자 8은 대칭면이 8개이므로 필요하고, $(1/2)$ 는 적합한 면적때문에 필요하다. x 에 대한 도함수인 식 (6.103)과 함께, 이 식은 임의의 시간에서 총 열속을 추산하는데 사용될 수 있다.

(a)에 대한 MATLAB에서 해를 구하기 위한 스크립트에 추가하여 다음과 같은 스크립트들이 추가된다.

```
dT11dx=(-T31+4*T21-3*700)/(2*deltax);
dT12dx=(-T32+4*T22-3*700)/(2*deltax);
dT13dx=(-T33+4*T23-3*700)/(2*deltax);
dT14dx=(-T34+4*T24-3*700)/(2*deltax);
dT15dx=(-T35+4*T25-3*700)/(2*deltax);
q=-8*1.2*(1/2*dT15dx+dT14dx+dT13dx+dT12dx+1/2*dT11dx);
```



(a)와 (b)에 대한 MATLAB 스크립트 파일은 CHAP6 디렉토리의 p614a.m, p614b.m, p614f.m으로 주어져 있다.

참고문헌

- [1] Geankoplis, C.J., *Transport Process and Unit Operations*, 3rd ed., Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1993.
- [2] Bird, R.B., Stewart, W.E. and Lightfoot, E.N., *Transport Phenomena*, New York: Wiley, 1960.
- [3] Dittus, F.W. and Boelter, University of California-Berkeley, *Pub. Engr.*, 2, 443, 1930.
- [4] Churchill, S.W. and Chu, H.H., *Int. J. Heat & Mass Transfer*, 18, 1323, 1975.
- [5] Thomas, L.C., *Heat Transfer*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1992.