제 2장 에너지 수지

학습목표

1. 엔탈피를 정의하고 표를 작성하는 데 편리한 특성의 이유를 설명한다.
2. 일에 대한 공학적 계산과정에서 가역성을 추정하는 중요성을 설명한다.
3. 여러 경로(등온성, 등적성 그리고 단열)를 따른 이상기체에 대한 일과 열의 흐름을 계산한다.
4. 에너지 수지를 단순화한다.
5. 열용량 다항식과 잠열을 이용하여 이상기체 및 응축상에 대한 U와 H의 변화량을 계산.
6. 이상기체 혹은 액체의 특성을 계산한다.

2.1 팽창/수축 일

- X방향으로 힘이 가해진 계에 가해진 일 $d\underline{W} = F_{applied}dx = -F_{system}dx$
  - 힘이 일정한 경우 $\underline{W} = -F\Delta x$
  - F가 x의 함수 인 경우 $\underline{W} = -\int Fdx$
  - 면적이 A인 표면에 유체가 작용하는 경우에는

$$P = F / A \Rightarrow F = P \cdot A$$

$$\underline{W}_{EC} = -\int PAdx = -\int Pd\underline{V}$$

  - 에너지의 출입을 고려하면 팽창/수축 일은

$$\underline{W}_{EC} = \int Pd\underline{V}$$ (계 크기의 가역적 변화)

2.2 축일

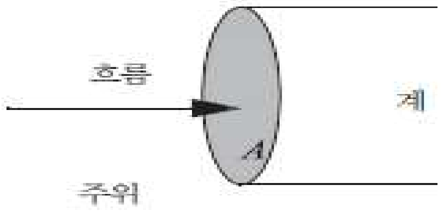
- 유체 이송장치 : 계의 부피 변화 없이 일이 가해지거나 제거됨

- 가역공정에 대한 축일은(뒤에서 자세히 설명함)

$$W_s = \int_{in}^{out} VdP \quad \text{가역적 축일, 흐름계}$$

2.3 흐름과 관련된 일

- 물질의 흐름에 수반되는 일



- $dw = Fdx$ 이므로

$$\underline{\dot{W}}^{in}_{flow} = (PA\dot{x})^{in} = (P\dot{\underline{V}})^{in} = (PV)^{in}\,\dot{m}^{in}$$

$$\underline{\dot{W}}^{out}_{flow} = -(PA\dot{x})^{out} = -(P\dot{\underline{V}})^{out} = -(P\dot{\underline{V}})^{out}\,\dot{m}^{out}$$

- 알짜 흐름일은

$$\underline{\dot{W}}_{flow} = (PV)^{in}\,\dot{m}^{in} - (PV)^{out}\,\dot{m}^{out}$$

2.4 잃은 일과 가역성

- 엔트로피 변화에 의한 무질서도 발생은 일이 열로 전환됨: 잃은 일
- 가역공정: 가장 정돈된 방식의 공정 : 소산이 없는 과정
  - **마찰: 에너지 소산**
    - 피스톤 내의 기체 팽창에 따른 일 손실
    - 속도구배로 인해 선운동 에너지가 소산: 접촉된 두 분자의 선운동이 회전운동으로 소산
    - 유체의 점성도에 의한 방향성(운동에너지)이 자유에너지(내부에너지)로 소산됨
    - 압력구배는 속도구배를 야기하므로 여러 종류의 구배가 서로 연관 되어 있음
    - 농도구배에 의한 확산과 온도구배에 의한 열전달
  - **가역성에 접근** : 기체 팽창에 따른 피스톤 정지 마개에 의한 영향
  - **일련의 평형상태에 의한 가역성**
  - **점도와 마찰 무시에 의한 가역성**: 수증기 캐터필러, 총구의 총알 속도, 원심펌프

    => 효율인자를 사용(제 3장)
  - 예제 2.1

2.5 열흐름

- 서로 다른 온도를 갖는 철로 연결된 두 개의 벽돌

$$\underline{Q}_{block1} = -\underline{Q}_{block2}$$

- 열 전달 속도가 시간에 따라 다른 경우

$$d\underline{Q} = \dot{\underline{Q}}dt$$

- 내부에너지와 연관시키면

$$d\underline{U} = d\underline{Q} \quad \text{or} \quad \frac{d\underline{U}}{dt} = \dot{\underline{Q}}$$

2.6 경로성질과 상태성질

- 등온경로, 등적경로, 등압경로 등
- 예제 2.2

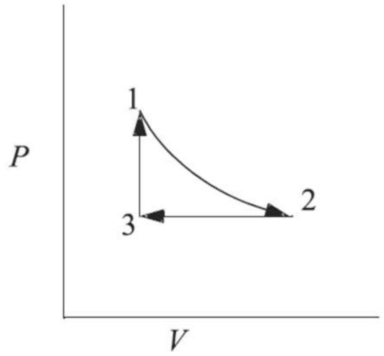


그림 2.2 • 예제 2.2의 경로선도

2.7 닫힌 계의 에너지 수지

- 닫힌 계: 외부로의 질량의 흐름이 없는 계

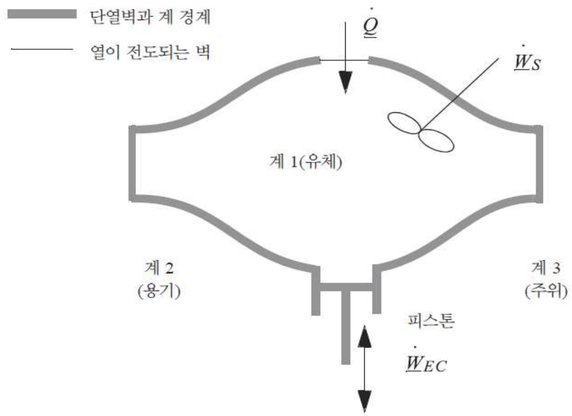


그림 2.3 • 닫힌계

- 수지식은

[계의 에너지 저장]=[계로의 열유입]+[계에 한 일]

- 점검항 방정식은

$$md\left[U+\frac{v^2}{2g_c}+\frac{gz}{g_c}\right]=d\underline{Q}+d\underline{W}_s+d\underline{W}_{EC}$$

닫힌 계 에너지 수지 계속

- 닫힌 계의 질량은 일정하므로

$$d\left[U+\frac{v^2}{2g_c}+\frac{gz}{g_c}\right]=d\underline{Q}+d\underline{W}_s+d\underline{W}_{EC}$$

- 적분하면

$$\Delta\left(U+\frac{v^2}{2g_c}+\frac{gz}{g_c}\right)=Q+W_S+W_{EC}$$

- 변화의 속도로 나타내면

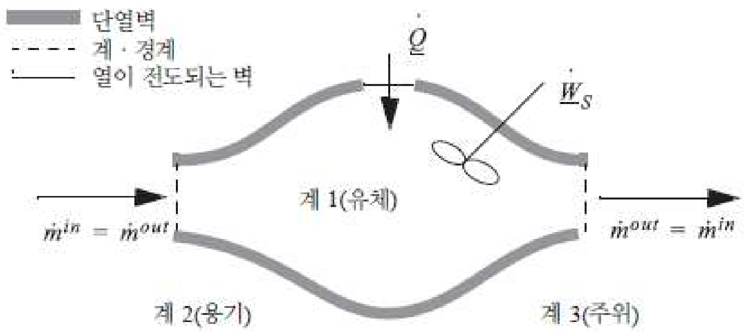
$$\frac{d}{dt}\left[U+\frac{v^2}{2g_c}+\frac{gz}{g_c}\right]=\dot{Q}+\dot{W}_S+\dot{W}_{EC}$$

- 축일이 없다면

$$\frac{dU}{dt}=\dot{Q}+\dot{W}_{EC} \quad \text{or} \quad \Delta U=Q+W_{EC}$$

2.8 열린계와 정상상태

- 열린 계: 외부와 질량 및 에너지의 교환이 있는 계
- 정상상태
  - 계의 모든 성질이 시간에 따라 변하지 않는다
  - 계 내부의 질량은 일정하게 유지된다.
  - 계의 질량 중심은 고정되어 있다.



- 유속일이 있으므로 시간에 의존하는 수지식이 된다.

[계 내의 에너지 축적속도] = [입구에서 유체의 질량당 에너지][유입 질량 유속]

\- [출구에서 유체의 질량당 에너지][유출 질량 유속] + [계를 향한 열흐름 속도]

= [계에 행한 일속도]

열린 계 에너지 수지 계속

- 정상상태에너지는 축적항이 없으므로

$$0 = \sum_{inlets}\left[U + \frac{v^2}{2g_c} + \frac{gz}{g_c}\right]^{in}\dot{m}^{in} - \sum_{outlets}\left[U + \frac{v^2}{2g_c} + \frac{gz}{g_c}\right]^{out}\dot{m}^{out} + \underline{\dot{Q}} + \underline{\dot{W}}_s + \underline{\dot{W}}_{flow}$$

- 흐름일을 고려하고 유입과 유출을 합산하면

$$0 = \sum_{inlets}\left[U + \frac{v^2}{2g_c} + \frac{gz}{g_c}\right]^{in}\dot{m}^{in} - \sum_{outlets}\left[U + \frac{v^2}{2g_c} + \frac{gz}{g_c}\right]^{out}\dot{m}^{out} + \underline{\dot{Q}} + \underline{\dot{W}}_s$$

$$+ \sum_{inlets}(PV)^{in}\dot{m}^{in} - \sum_{outlets}(PV)^{out}\dot{m}^{out}$$

- 흐름 항을 결합하면

$$0 = \sum_{inlets}\left[U + PV + \frac{v^2}{2g_c} + \frac{gz}{g_c}\right]^{in}\dot{m}^{in} - \sum_{outlets}\left[U + PV + \frac{v^2}{2g_c} + \frac{gz}{g_c}\right]^{out}\dot{m}^{out} + \underline{\dot{Q}} + \underline{\dot{W}}_s$$

- 엔탈피의 정의 : $H = U + PV$

$$0 = \sum_{inlets}\left[H + \frac{v^2}{2g_c} + \frac{gz}{g_c}\right]^{in} \dot{m}^{in} - \sum_{outlets}\left[H + \frac{v^2}{2g_c} + \frac{gz}{g_c}\right]^{out} \dot{m}^{out} + \underline{\dot{Q}} + \underline{\dot{W}}_s$$

주의 : 계가 열에너지를 얻을 때 Q는 양의 부호를 가진다. 계가 일에너지를 얻을 때 W 역시 양의 부호를 가진다. $\dot{m}^{in}$ 과 $\dot{m}^{out}$ 은 항상 양의 값을 갖는다. 그러므로 $\dot{m}_{system} = \dot{m}^{in} - \dot{m}^{out}$ 은 계가 질량을 얻을 때는 양의 값이고, 정상 흐름일 때는 0이다. 질량은 적절한 단위환산으로 비반응계에서 몰로 대체될 수 있다.

- 유출입이 각각 한개 씩인 경우

$$0 = \left[H + \frac{v^2}{2g_c} + \frac{gz}{g_c}\right]^{in} \dot{m}^{in} - \left[H + \frac{v^2}{2g_c} + \frac{gz}{g_c}\right]^{out} \dot{m}^{out} + \underline{\dot{Q}} + \underline{\dot{W}}_s$$

- 운동에너지와 퍼텐셜 에너지를 무시하면 $0 = -\Delta H\dot{m} + \underline{\dot{Q}} + \underline{\dot{W}}_s$
- 몰유속으로 나누면

$$0 = -\Delta H + \dot{Q} + \dot{W}_s \quad \Rightarrow \quad \Delta H = \dot{Q} + \dot{W}_s$$

- Δ **부호: 유입과 유출의 구분이 필요**
- **엔탈피와 축일: 단열이고 닫힌 계의 질량덩어리 m에 대하여**

$$d\left[U + \cancel{\frac{v^2}{2g_c}} + \cancel{\frac{gz}{g_c}}\right] = \cancel{dQ} + \cancel{dW_s} + dW_{EC}$$

- 적분하면 $U^{out} - U^{in} = W_{EC}$
- 부분적분으로 일을 표시하면

$$\Rightarrow [U + PV] - [U + PV] = \int_{in}^{out} VdP$$

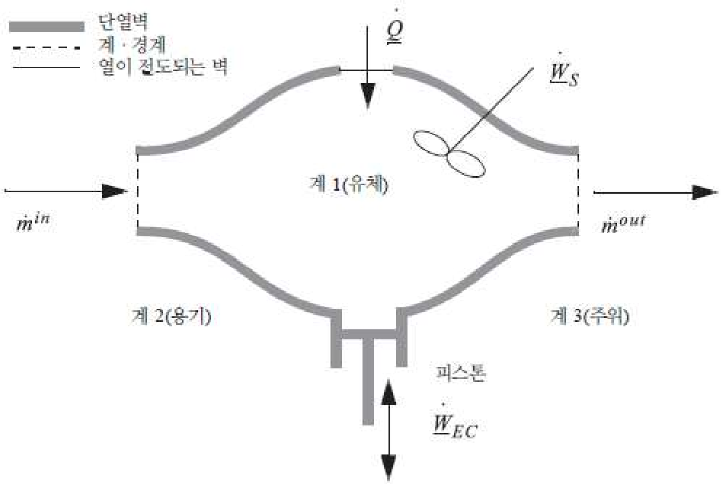
- PV항은 장치작동에 기여하지 않으므로 $W_s = \int_{in}^{out} VdP$

$$W_{EC} = -\int_{in}^{out} PdV = -[PV]_{in}^{out} + \int_{in}^{out} VdP$$

- 열린 계에 대하여 $H^{out} - H^{in} = \cancel{Q} + W_s$ 액체
- 액체에 대해서 $W_s \approx V^L(P^{out} - P^{in}) = \dfrac{\Delta P}{\rho}$ 액체

주의 : $dW_s = VdP$ 로 주어진 축일은 $dW_{EC} = PdV$ 인 팽창/수축 일과 $d\underline{W}_{flow} = PVdm$ 인 흐름일과는 별개이다.

2.9 완전한 에너지 수지



- 일반적인 에너지 수지식

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(U+\frac{v^2}{2g_c}+\frac{gz}{g_c}\right)\right]=\sum_{inlets}\left[H++\frac{v^2}{2g_c}+\frac{gz}{g_c}\right]^{in}\dot{m}^{in}-\sum_{outlets}\left[H++\frac{v^2}{2g_c}+\frac{gz}{g_c}\right]^{out}\dot{m}^{out}$$

$$+\underline{\dot{Q}}+\underline{\dot{W}}_{EC}+\underline{\dot{W}}_{s}$$

- 시간의 의존성을 감안하면

$$d\left[m\left(U+\frac{v^2}{2g_c}+\frac{gz}{g_c}\right)\right]=\sum_{inlets}\left[H++\frac{v^2}{2g_c}+\frac{gz}{g_c}\right]^{in}dm^{in}-\sum_{outlets}\left[H++\frac{v^2}{2g_c}+\frac{gz}{g_c}\right]^{out}dm^{out}$$

$$+d\underline{Q}+d\underline{W}_{EC}+d\underline{W}_{s}$$

2.10 내부에너지, 엔탈피 그리고 열용량

- 정적, 정압 열용량 $C_v \equiv \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad C_P \equiv \left(\dfrac{\partial H}{\partial T}\right)_P$
- 열용량, U와 H의 관계
  - 이상기체의 경우

$$\Delta H \equiv \Delta U + \Delta(PV) = \Delta U + R(\Delta T)$$ 이상기체에 대한 정확한 식

$$C_P = C_V + R$$ 이상기체에 대한 정확한 식

  - 액체와 고체의 경우 몰부피가 압력의 영향을 받지 않으므로

$$\Delta H_T \approx V \Delta P_T$$ $T_r = 0.75$ 이하의 액체와 고체

  - 요약하면

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} C_V(T)dT$$
이상기체 : 정확
실제 기체 : V가 일정할 때만 유효

$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_P(T)dT$$
이상기체 : 정확
실제 기체 : P가 일정할 때만 유효

$$\Delta H \approx \int_{T_1}^{T_2} C_P(T)dT + V\Delta P$$ $T_r = 0.75$ 이하의 액체와 고체 : 근사

$$\Delta U = \Delta H - \Delta(PV) = \Delta H - V\Delta P = \int_{T_1}^{T_2} C_P(T)dT$$
$T_r = 0.75$ 이하의 액체나 고체 : 압력 변화가 몇 MPa이하일 경우 근사

- 물성치에 대한 표/선도와의 관계
  - 열용량 추산: 부록과 추가적인 참고도서
  - 상전이(액체-증기): 기화엔탈피

$$\Delta U^{vap} = \Delta H^{vap} - \Delta(PV)^{vap} = \Delta H^{vap} - (P^{sat}V)^{V} - (P^{sat}V)^{L} = \Delta H^{vap} - P^{sat}(V^{V} - V^{L})$$

- 근사적으로

$$\Delta U^{vap} = \Delta H^{vap} - P^{sat}V^{V} \approx \Delta H^{vap} - RT^{sat}$$

- 기화엔탈피가 문헌에 주어지지 않은 경우

$$\frac{\Delta H^{vap}}{RT_C} \approx 7(1 - T_r)^{0.354} + 11\omega(1 - T_r)^{0.456}$$

- Clausius-Clapeyron 식을 이용하면

$$\Delta H^{vap} = -R\frac{d\ln P^{sat}}{d(1/T)} (T_r < 0.75)$$

- Antoine 식을 사용할 수 있는 경우

$$\frac{d\ln P^{sat}}{d(1/T)} = \frac{2.3026\, d\log P^{sat}}{d(1/T)} = \frac{-2.3026B(T + 273.15)^2}{(T + C)^2}$$

- Antoine 식의 매개변수를 위하여 지름길 증기압 모델을 이용하면

$$A = \log_{10} P_c + 7(1 + \omega)/3; \quad B = -7(1 + \omega)T_c/3; \quad C = 273.15$$

계속

- 상전이(고-액): 용융엔탈피
  - 편람과 부록의 표
  - 용융에 의한 부피변화가 작을 때

$$\Delta U^{fus} = \Delta H^{fus} - \Delta(PV)^{fus} = \Delta H^{fus} - P(V^L - V^S) \approx \Delta H^{fus}$$

2.11 기준상태

- 기준상태를 지정하기 위한 내용

  1. 혼합물이 순수성분인지 아닌지 여부
  2. 집합체의 상태(*S*,*L*, 또는 *V*)
  3. 압력
  4. 온도

- 이상기체 물성: T와 P를 지정해야 됨

$$U^{ig} = \int_{T_R}^{T} C_V dT + U_R^{ig}$$

$$H^{ig} = \int_{T_R}^{T} C_P dT + H_R^{ig}$$

- 상변화를 수반하는 상태물성

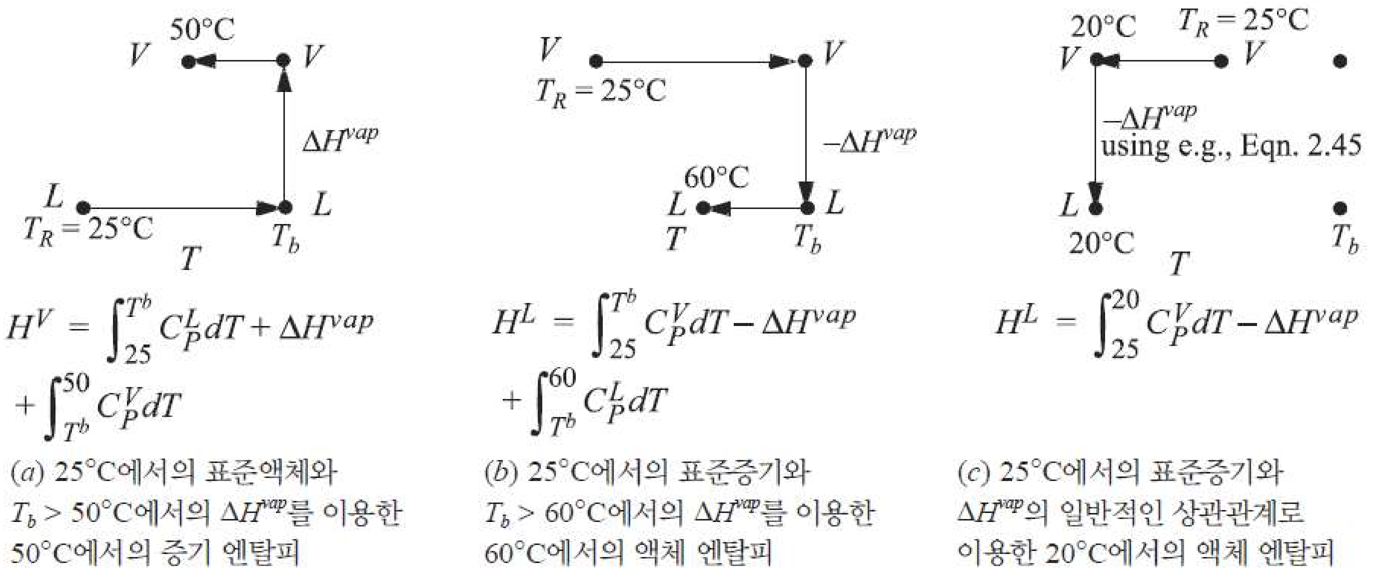


그림 2.6 액/기상변화를 포함하는 물성을 계산하기 위한 상태경로 도해. 예제들을 나타내고 있으며, 수정된 경로는 정상 끓는점(T_b) 이상에 적용할 수 있다. 비슷한 경로는 고체/액체 또는 고체/기체 변화에 적용한다. 일반적인 상관관계는 정상 끓는점 값과는 다른 ΔH^{vap} 에 사용하는 것을 유의하라. 이 방법은 임계점 이하 조건에서 이용된다. 여기의 어떤 경로에 대해서도 압력보정은 그림에 나타나 있지 않다.

2.12 운동에너지와 퍼텐셜 에너지

- 예제 2.9와 2.10

2.13 공정장치의 에너지 수지

- 밸브와 조름: Joule-Thomson 팽창

$$0 = \left[H + \cancel{\frac{v^2}{2g_c}} + \cancel{\frac{gz}{g_c}} \right]^{in} \dot{m}^{in} - \left[H + \cancel{\frac{v^2}{2g_c}} + \cancel{\frac{gz}{g_c}} \right]^{out} \dot{m}^{out} \cancel{+ \dot{\underline{Q}}} \cancel{+ \dot{\underline{W}}_{EC}} \cancel{+ \dot{\underline{W}}_S}$$

$$\boxed{\Delta H = 0 \quad \text{조름}}$$

- 노즐

$$0 = \left[H + \frac{v^2}{2g_c} + \cancel{\frac{gz}{g_c}} \right]^{in} \dot{m}^{in} - \left[H + \frac{v^2}{2g_c} + \cancel{\frac{gz}{g_c}} \right]^{out} \dot{m}^{out} \cancel{+ \dot{\underline{Q}}} \cancel{+ \dot{\underline{W}}_{EC}} \cancel{+ \dot{\underline{W}}_S}$$

$$\boxed{\Delta H = (-\Delta(v^2)/(2g_c)) \quad \text{노즐}}$$

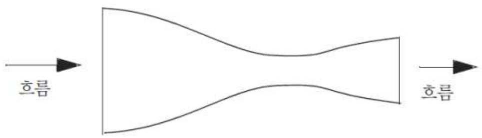


그림 2.7 • 입구와 출구가 점감되는 방식을 보여 주고 있는 수축–확산 노즐

공정장치 계속

- 열교환기

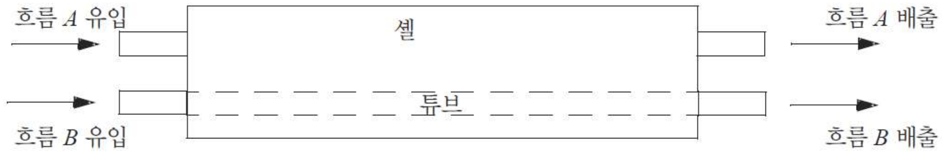


그림 2.8 • 병류 흐름방식을 가지는 일반적 열교환기. Tube-side는 일반적으로 병렬 튜브다발로 구성되어 있으나 편의를 위해 하나의 튜브로 나타내었다.

  – 정상상태에서

$$0 = \left[H + \cancel{\frac{v^2}{2g_c}} + \cancel{\frac{gz}{g_c}} \right]^{in} \dot{m}^{in} - \left[H + \cancel{\frac{v^2}{2g_c}} + \cancel{\frac{gz}{g_c}} \right]^{out} \dot{m}^{out} + \underline{\dot{Q}} + \cancel{\underline{\dot{W}}_{EC}} + \cancel{\underline{\dot{W}}_{S}}$$

  – 간단히 하면 $0 = -\Delta H \dot{m} + \underline{\dot{Q}}$

  – 몰 기준으로 하면

$$\boxed{0 = -\Delta H + \underline{Q} \quad \text{반 열교환기}}$$

열교환기 계속

– 전체 열교환기를 계로 택하면

$$0 = \sum_{inlets}\left[H + \cancel{\frac{v^2}{2g_c}} + \cancel{\frac{gz}{g_c}}\right]^{in} \dot{m}^{in} - \sum_{outlets}\left[H + \cancel{\frac{v^2}{2g_c}} + \cancel{\frac{gz}{g_c}}\right]^{out} \dot{m}^{out} + \cancel{\underline{\dot{Q}}} + \cancel{\underline{\dot{W}}_{EC}} + \cancel{\underline{\dot{W}}_S}$$

– 간단히 하면

$$0 = \sum_{inlets} H^{in}\dot{m}^{in} - \sum_{outlets} H^{out}\dot{m}^{out}$$

$$\boxed{0 = -\Delta H_A \dot{m}_A - \Delta H_B \dot{m}_B \quad \text{전체 열교환기}}$$

공정장치 계속

- 단열 터빈 또는 단열 팽창기

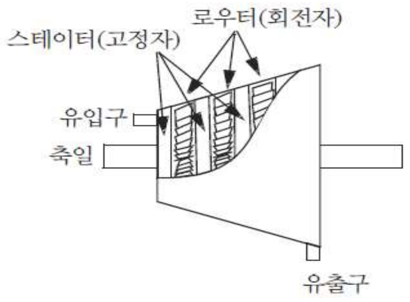


그림 2.9 • 터빈의 구조. 기체의 흐름에 의해 rotor(축)가 회전한다. Shell에 연결된 날개는 정지해 있고(stator) 노즐로서 역할을 하기 위해 종종 휘어져 있다. Stator의 날개는 rotor를 명확히 보이기 위해 표시하지 않았다.

– 정상상태에서

$$0 = \sum_{inlets}\left[H + \cancel{\frac{v^2}{2g_c}} + \cancel{\frac{gz}{g_c}}\right]^{in} \dot{m}^{in} - \sum_{outlets}\left[H + \cancel{\frac{v^2}{2g_c}} + \cancel{\frac{gz}{g_c}}\right]^{out} \dot{m}^{out} \cancel{+ \dot{\underline{Q}}} \cancel{+ \dot{\underline{W}}_{EC}} + \dot{\underline{W}}_s$$

– 그러므로

$$0 = (H^{in} - H^{out})\dot{m} + \dot{\underline{W}}_s = -\Delta H\dot{m} + \dot{\underline{W}}_s$$

– 질량이나 몰을 기준으로 하면

$\boxed{0 = -\Delta H + W_s \text{ 단열 터빈/팽창기/응축기/펌프}}$

- 단열압축기
  - 축방향 압축기는 터빈의 역방향
  - 에너지 수지식은 터빈에 대한 식과 같음
- 펌프
  - 액체를 수송
  - 에너지 수지식은 터빈이나 압축기와 동일
- 축일의 계산

$$\boxed{W_S = \int_{in}^{out} V dP}$$ 가역 펌프, 응축기, 터빈

$$\boxed{W_S \approx V^L\left(P^{out} - P^{in}\right) = \frac{\Delta P}{\rho}}$$ 액체 펌프

2.14 공정열역학을 풀기 위한 전략

1. 계 경계를 선택: 열린 계, 닫힌 계
2. 유체의 상태와 정상상태 여부를 파악
3. 미지의 상태변수의 수를 파악
4. 물질수지식과 에너지수지식을 세움
   a. 비정상상태에 대하여
      (a) 직접적분이 가능한지 파악
      (b)적분이 불가능한 경우 재배열을 통해 간단히 정리
5. 미지의 변수에 대한 추가적인 정보파악: 단열, 고립, 조름, 가역, 비가역 등
6. 유체의 열역학적 특성을 도입 : P, V, T, U, H, Cp, Cv 등
   a. 이상기체 접근법
   b. 열역학적 선도나 표
   c. 부피 상태방정식
7. 경계를 다시 설정해 봄
8. 해를 얻은 후 적용한 가정을 확인

2.15 닫힌 계와 정상상태 열린 계

- 예제 2.11 이상기체의 단열, 가역팽창
- 예제 2.12 이상기체의 연속적 단열, 가역 압축
- 예제 2.13 이상기체의 연속적 등온, 가역압축
- 예제 2.14 터빈에서의 열손실

예제 2.11 이상기체의 단열, 가역 팽창

피스톤 및 실린더 장치에서 이상기체가 원래 부피의 2배로 단열, 가역 팽창되고 있다고 가정하자. 최종온도는 얼마인가?

풀이

첫째로 에너지 수지식을 고려하자. 계는 실린더 안에서 기체일 것이고, 닫혀 있다. 기준이 정해지지 않았으므로 1 mole을 선택할 수 있다. 질량 유속, 열전달, 그리고 축일이 없기 때문에 에너지 수지식은 다음과 같다.

$$d\left[U + \cancel{\frac{v^2}{2g_c}} + \cancel{\frac{g}{g_c}z}\right] = \cancel{dQ} + \cancel{dW_S} + dW_{EC}$$

$$dU = -PdV$$

이런 경우에 전략의 단계 4를 적용함으로써 P가 T에 의존하기 때문에 양변을 독립적으로 적분할 수 없다는 것을 알 수 있다. 그러므로 적분하기 전에 몇 가지 항을 결합할 필요가 있다.

$$C_V dT = -RT\frac{dV}{V} \quad \text{그러므로} \quad \frac{C_V}{T}dT = -\frac{R}{V}dV \qquad \text{〈식 ig 2.62〉}$$

이러한 방법을 변수분리범이라 한다. 온도에 의존하는 모든 변수는 식의 좌변으로 옮기고 부피에 의존하는 모든 변수는 우변에 위치시킨다. 이제 식을 간편화하기 위해서 열용량이 일정하다고 가정하고 적분하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\frac{C_V}{R}\ln\frac{T}{T^i} = \ln\frac{V^i}{V} \qquad \text{〈식 *ig〉}$$

$$\boxed{\left(\frac{T}{T^i}\right)^{(C_V/R)} = \frac{V^i}{V}} \qquad \text{〈식 *ig 2.63〉}$$

이 문제에서는 필요치 않더라도 식을 재배열하는 것은 다른 문제에 대해서 유용하게 쓸 수 있다. T와 P에 관계된 식으로 바꾸기 위해서 이상기체 법칙 $V = RT/P$를 사용하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{T}{T^i}\right)^{\frac{C_V}{R}} = \frac{T^i}{P^i}\frac{P}{T} \qquad \text{〈식 *ig〉}$$

다시 정리하면

$$\left(\frac{T}{T^i}\right)^{(C_V/R)}\frac{T}{T^i} = \left(\frac{T}{T^i}\right)^{(C_V/R)+1} = \frac{P}{P^i} \qquad \text{〈식 *ig〉}$$

그러므로

$$\boxed{\left(\frac{T}{T^i}\right)^{(C_P/R)} = \frac{P}{P^i}} \qquad \text{〈식 *ig 2.64〉}$$

또한 P와 V와 관계된 식으로 바꾸기 위해서 식 2.63에 이상기체 법칙 $T = PV/R$을 사용하면

$$\left(\frac{PV}{P^iV^i}\right)^{(C_V/R)} = \frac{V^i}{V} \qquad \text{〈식 *ig〉}$$

$$\frac{P}{P^i} = \left(\frac{V^i}{V}\right)^{(R/C_V)}\frac{V^i}{V} = \left(\frac{V^i}{V}\right)^{(R/C_V)+1} = \left(\frac{V^i}{V}\right)^{(C_P/C_V)} \qquad \text{〈식 *ig〉}$$

그러므로

$$\boxed{PV^{(C_P/C_V)} = \text{일정}} \qquad \text{〈식 *ig 2.65〉}$$

예제 2.12 이상기체의 연속적 단열, 가역 압축

5 bar, 298 K에서 유속 1 kmol/h를 갖는 공기가 연속공정에서 25 bar로 단열, 가역 압축되고 있다고 가정하자. 출구온도는 얼마이며, 압축기에 요구되는 일률은 hp로 얼마인가?

풀이

$$\boxed{\Delta H = \cancel{Q} + W_S} \qquad \text{〈식 2.66〉}$$

식 2.31을 이상기체에 대해 나타내면 다음과 같다.

$$dW_S = dH = VdP$$

$$C_P dT = RT\frac{dP}{P}, \quad \frac{C_P}{T}dT = \frac{R}{P}dP \qquad \text{〈식 *ig 2.67〉}$$

다시 한 번 변수를 분리한다. 나머지 유도과정은 전체적으로 예제 2.11과 비슷하며, 결과식은 동일하다.

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(R/C_P)}} \qquad \text{〈식 *ig 2.68〉}$$

$$T_2 = 298\left(\frac{25}{5}\right)^{\frac{2}{7}} = 472\ \text{K}$$

$$\boxed{W_S^{ig} = \Delta H^{ig} = C_P^{ig}\Delta T = C_P^{ig}T_1\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(R/C_P^{ig})} - 1\right]} \qquad \text{〈식 *ig 2.69〉}$$

$W_S = 3.5 \cdot 8.314 \cdot (472 - 298) = 5063$ J/mole 를 대입하면,

이 공정은 가역공정이므로 주어진 유속에 대해 계산하면 다음과 같은 일이 계산된다.

$$W_S^{rev} = 5063\ \text{J/mole}\cdot[1000\ \text{mole/hr}]\cdot[1\ \text{hr}/3600\ \text{sec}]\cdot[1\ \text{hp}/(745.7\ \text{J/s})] = 1.9\ \text{hp}$$

예제 2.13 이상기체의 연속적 등온, 가열 압축

앞의 예제와 같은 압축공정이지만, 정상상태 등온 압축공정으로 생각한다. 열 제거 속도는 얼마이며 압축기에 요구되는 일률은 hp로 얼마인가?

풀이

57쪽의 (엔탈피 및 축일의 이해) 부분의 관점으로 돌아가서 단위 질량의 이상기체에 대한 EC 일 및 흐름일을 분석하라.

W_{EC}는 다음과 같다.

$$W_{EC} = -\int P dV = -\int (RT/V) dV = -RT\ln(V_2/V_1) \qquad \langle 식\ {}^*ig \rangle$$

이상기체, 등온공정에 대하여 $V_2/V_1 = P_1/P_2$. 역수와 음의 로그에 주목하라.

$$W_{EC} = -RT\ln(V_2/V_1) = RT\ln(P_2/P_1) \qquad \langle 식\ {}^*ig \rangle$$

이것은 주어진 압력에서 단위 질량의 이상기체를 등온 압축시키기 위한 일이다.
흐름일은 단위 질량의 이상기체에 대하여 수행되었다.

$$W_{flow} = PV_{out} - PV_{in} = RT_{out} - RT_{in} = 0 \qquad \langle 식\ {}^*ig \rangle$$

따라서 단위 질량의 이상기체에서 등온 압축에 필요한 총일은,

$$W_S = RT\ln(P_2/P_1) \qquad \langle 식\ {}^*ig \rangle$$

$$W_S = RT\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 8.314(298)\ln 5 = 3987\ \frac{\text{J}}{\text{mol}} \qquad \langle 식\ {}^*ig\ 2.70 \rangle$$

이 공정은 가역공정이므로 주어진 유속에서 다시 계산하면,

$$W_S^{rev} = 3987\ \text{J/mole}\cdot[1000\ \text{mole/hr}]\cdot[1\ \text{hr}/3600\ \text{sec}]\cdot[1\ \text{hp}/745.7\ \text{J/s}] = 1.5\ \text{hp}$$

2.16 비정상상태 열린 계

예제 2.15 **탱크로부터 새어 나오는 이상기체의 단열 팽창**

단열된 탱크로부터 이상기체가 새어 나오고 있다. 탱크로부터 새어 나오는 기체에 대한 온도 변화와 압력 변화를 연관 짓고 탱크에 대한 $\Delta\underline{U}$를 구하라.

풀이

탱크 안에 있는 기체를 계로 선택하자. 이것은 비정상상태 열린계일 것이다. 계로 들어가는 흐름은 없고 나오는 흐름이 하나 있다. 물질수지식은 $dn = -dn^{out}$ 이다.

운동에너지와 퍼텐셜 에너지는 무시할 수 있다. 기체가 팽창되어도 계의 크기는 변하지 않기 때문에 팽창/수축 일은 없다. 에너지 수지식은 다음과 같다(1몰 기준).

$$d(nU) = H^{in}\cancel{dn^{in}} - H^{out}dn^{out} + \cancel{d\underline{Q}} + \cancel{d\underline{W}_{EC}} + \cancel{d\underline{W}_S}$$

출구 흐름의 엔탈피와 탱크의 엔탈피가 일치하기 때문에 $H^{out} = H$이다. $d(nU) = -H^{out}dn^{out} = Hdn$. H는 변하고 있는 온도의 함수이다. 그래서 문제해법 전략의 힌트 4(a)를 적용할 수가 없다. 적분하기 전에 몇 가지 항을 결합할 필요가 있다. 미분의 곱셈법칙에 의해서 좌변은 $d(nU) = ndU + Udn$으로 나타낼 수 있는데 이를 에너지 수지식에 대입하면

$$ndU = (H-U)dn$$

다른 식들을 대입하면 에너지 수지식은 T와 n의 항으로 나타낼 수 있다.

$$(H-U) = PV = RT, \quad dU = C_V dT, \;\Rightarrow \frac{C_V}{R}\frac{dT}{T} = \frac{dn}{n} \qquad \langle 식\ ig\rangle$$

$$\boxed{\frac{C_V}{R}\ln\frac{T}{T^i} = \ln\frac{n}{n^i}} \qquad \langle 식\ {}^{*}ig\rangle$$

탱크의 부피는 일정하다($\underline{V}$ = 일정). 따라서

$$\ln\frac{n}{n^i} = \ln\frac{PT^i}{TP^i} = -\ln\frac{T}{T^i} + \ln\frac{P}{P^i} = \frac{C_V}{R}\ln\frac{T}{T^i} \qquad \langle 식\ ig\rangle$$

이항하면,

$$\left(\frac{C_V}{R}+1\right)\ln\frac{T}{T^i} = \frac{C_P}{R}\ln\frac{T}{T^i} = \ln\frac{P}{P^i} \qquad \langle 식\ {*}ig\rangle$$

C_v와 C_p 사이의 관계를 인식하고, $\gamma \equiv C_p/C_v$(= 1.4, 이원자 이상기체에 대하여)를 정의하고

$R/C_p = (C_p - C_v)/C_p = 1 - /(1/\gamma) = (\gamma - 1)/\ \gamma$을 명심하라.

$$\boxed{\frac{T}{T^i} = \left(\frac{P}{P^i}\right)^{R/C_p} = \left(\frac{P}{P^i}\right)^{(1-(1/\gamma))}} \qquad \langle 식\ {*}ig\ 2.71\rangle$$

이상기체 법칙($PV = RT$)을 사용하여 표현이 다른 식을 얻을 수 있다.

$$V/V^i = \left(\frac{P^i}{P}\right)^{1/\gamma},\ \ P^i/P = (V/V^i)^{\gamma} = (T^i/T)^{(1/\gamma)-1},\ \ T^i/T = (V/V^i)^{\gamma/(\gamma-1)} \qquad \langle 식\ {*}ig\ 2.72\rangle$$

기준상태 온도가 결과식에 나오기 때문에 계의 내부에너지 변화에 대한 수치값은 기준상태에 의존하게 된다.

$$\Delta\underline{U} = n^f(C_V(T^f - T_R) + U_R) - n^i(C_V(T^i - T_R) + U_R) \qquad \langle 식\ {*}ig\rangle$$

예제 2.16 탱크 내로의 이상기체의 단열 공급

300 K, 3000 bar의 헬륨이 탱크 내 압력이 3000 bar와 같게 될 때까지 진공 실린더로 공급되고 있다. 실린더 내의 헬륨의 최종온도를 계산하라($C_p/R = 5/2$).

풀이

계는 탱크 내부 기체가 되며 이 계는 정상상태, 열린계가 될 것이다. 물질수지식은 $dn = dn^{in}$이고 에너지 수지식은 다음과 같다.

$$d(nU) = H^{in}dn^{in} - H^{out}\cancel{dn^{out}} + \cancel{d\underline{Q}} + \cancel{d\underline{W}_{EC}} + \cancel{d\underline{W}_S}$$

H^{in}은 탱크가 채워지는 동안 일정하다. 그러므로 문제 해법 전략의 힌트 4a에 의해 각 항을 적분할 수가 있다. 내부로 들어오는 엔탈피는 계의 엔탈피와 다른 상태에 있기 때문에 상첨자를 그대로 유지하는 것에 주의할 필요가 있다. 에너지 수지식의 우변은 다음과 같이 적분할 수 있다.

$$\int_i^f H^{in}dn = H^{in}\int_i^f dn = H^{in}(n^f - n^i) = H^{in}n^f$$

에너지 수지식의 좌변은

$$\Delta(Un) = U^f n^f - U^i n^i = U^f n^f$$

엔탈피의 정의로 결과식을 정리하면,

$$U^f = H^{in} = U^{in} + PV^{in} = U^{in} + RT^{in} \qquad \text{〈식 *ig 2.73〉}$$

그리고 열용량의 정의로부터 온도를 구할 수 있다.

$$\Delta U = C_V(T^f - T^{in}) = RT^{in} \Rightarrow T^f = T^{in}(R + C_v)/C_v = T^{in}C_p/C_v \qquad \text{〈식 *ig〉}$$

여기에서 최종온도는 압력에 의존하지 않는다는 것에 주의해야 한다.

예제 2.17 탱크로부터 새어 나오는 수증기의 단열 팽창

단열 탱크에 215°C의 수증기와 물 500 kg이 있다. 탱크 부피의 반은 기체이고, 반은 액체로 채워져 있다. 탱크 전체온도가 균일하게 유지되도록 건조증기의 25 kg이 아주 천천히 빠져나간다. 최종온도와 압력은 얼마인가?

풀이

이 예제는 예제 2.15의 풀이와 비슷하지만 이상기체 법칙을 더 이상 적용할 수가 없다. 에너지 수지식을 비슷한 방법으로 줄여 나가는데, 밖으로 나오는 흐름은 증기로만 구성되어 있다는 것에 주의하여야 한다. 그러므로 탱크의 총괄 평균 엔탈피가 아니다.

$$d(mU) = -H^{out}dm^{out} = H^{V}dm$$

수증기 엔탈피가 일정하다면 식의 양변은 서로 독립적으로 적분될 수 있다. 수증기표에서 보면 엔탈피는 195°C까지는 포화곡선을 따라서 2800 kJ/kg에서 약 10 kJ/kg(0.3%)만 변한다. 우변을 $H^V\Delta m$으로 간단하게 적분하기 위해 엔탈피를 2795 kJ.kg으로 일정하다고 가정해 보자. 이 과정은 부록 B의 사다리꼴 법칙에 있는 수치적분과 같다는 것을 참고하라. 분석해법은 단지 바람직한 것일 뿐이지 절대적으로 필요한 것은 아니다. 에너지 수지식은 2.14절의 힌트 4(a)를 사용하여 적분할 수있다.

$$\Delta\underline{U} = m^f U^f - m^i U^i = 2795(m^f - m^i) = 2795(-25) = -69,875\ \text{kJ}$$

질량 $m^f = 475$이고, m^iU^i는 쉽게 구할 수 있으므로 U^f의 계산이 가능하다. 215°C에서 포화 혼합물 각각의 1 m³에 대하여,

$$\frac{0.5\ \text{m}^3\ \text{기체}}{} \bigg| \frac{\text{kg 기체}}{0.0947\ \text{m}^3\ \text{기체}} = 5.28\ \text{kg 기체}$$

$$\frac{0.5\ \text{m}^3\ \text{액체}}{} \bigg| \frac{\text{kg 액체}}{0.001181\ \text{m}^3\ \text{액체}} = 423.4\ \text{kg 액체}$$

그러므로

$$V^{t} = \frac{\text{m}^3}{423.4 + 5.28 \text{ kg}} = 0.00233 \text{ m}^3/\text{kg}$$

탱크의 부피, 질, 그리고 내부에너지는 다음과 같다.

$$\underline{V}_T = \frac{500 \text{ kg} \mid \text{m}^3}{\mid 428.63} = 1.166 \text{ m}^3$$

$$q^i = 5.28 \text{ kg 기체} / 428.63 \text{ kg} = 0.0123 U^i = 918.04 + 0.0123(1681.9) = 938.7 \text{ kJ/kg}$$

$$\underline{U}^i = 938.7 \text{ kJ/kg} \cdot 500 \text{ kg} = 469{,}400 \text{ kJ}$$

에너지 수지와 질량 수지로부터

$$U^f = (-69{,}875 + 469{,}400) \text{ kJ} / 475 \text{ kg} = 841.0 \text{ kJ/kg}$$

$$V^f = 1.166 \text{ m}^3 / 475 \text{ kg} = 0.00245 \text{ m}^3/\text{kg}$$

이 상태 변수에 부합하는 P^f와 T^f를 찾을 필요가 있다. 총질량당 부피가 저압에서 포화 증기와 액체의 중간에 있기 때문에 해답은 포화곡선을 따라 움직일 것이다. P^f를 가정하고(포화 T^f에 해당하는) V^f로부터 q를 구한 다음, U^f_{calc}를 계산해서 $U^f = 841.0$ kJ/kg과 비교한다. 만일 U^f_{calc}가 너무 높다면 P^f(그리고 T^f)의 가정이 낮게 되었을 것이다.

$V = V^L + q(V^V - V^L)$이므로,

$$q = \frac{0.00245 - V^L}{V^V - V^L} \text{ and from this value of } q,\ U^f_{calc} = U^L + q(U^V - U^L)$$

첫 번째 가정을 설정하기 위해 $U^L < U^f = 841.0$ kJ/kg이 필요하다. 첫 번째 가정을 $T^f =$ 195°C로 하고 수증기표로부터 물성값을 다음 표에 나타내었다. 이 초기의 가정으로부터 U^f_{calc} = 845 kJ/kg를 얻었다. 이상의 반복 계산은 필요 없다. 이 상태의 H^v는 2789이므로 $H^{out} \approx$ 일정이라는 가정은 유효하다.

2.17 에너지 수지식에서 각항의 세부사항

- 일반적인 계에 대한 총괄 에너지 수지식

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(U+\frac{v^2}{2g_c}+\frac{gz}{g_c}\right)\right]=\sum_{inlets}\left(H+\frac{v^2}{2g_c}+\frac{gz}{g_c}\right)^{in}\dot{m}^{in}$$

$$-\sum_{outlets}\left(H+\frac{v^2}{2g_c}+\frac{gz}{g_c}\right)^{out}\dot{m}^{out}+\sum_{surfaces}\underline{\dot{Q}}+\underline{\dot{W}}_{EC}+\underline{\dot{W}}_{S}$$

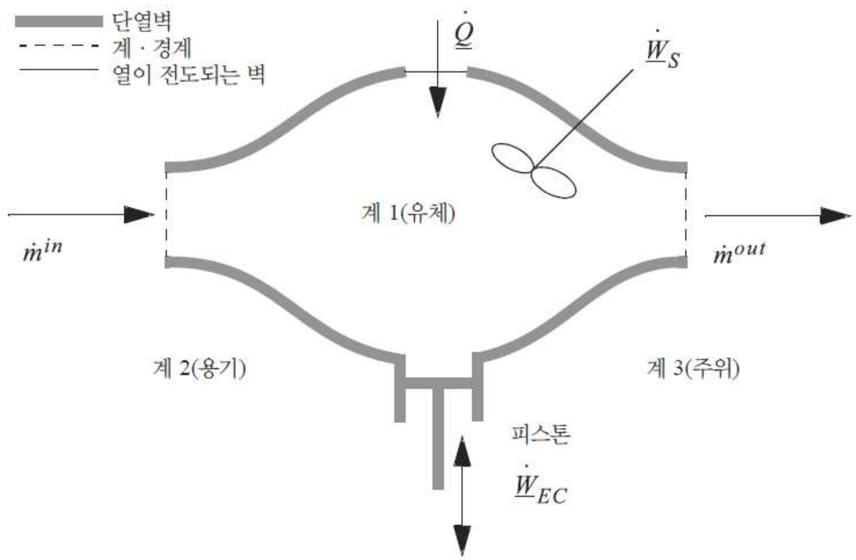


그림 2.10 • 일반적인 계